

PROVA SUPLEMENTAR

26.03.2003

Importante: Justifique todas as suas afirmações e acompanhe as suas respostas de uma figura elucidativa dos raciocínios que efectuar.

1. Sejam $\angle ACB$ um ângulo do plano euclidiano A_1 um ponto da semi-recta CA e B_1 um ponto da semi-recta CB tais que $|CA| = |CB_1|$, $|CA_1| = |CB|$. Mostre que o ponto de intersecção de \overline{AB} e $\overline{A_1B_1}$ pertence à bissectriz de $\angle ACB$.
2. Seja $\triangle ABC$ um triângulo do plano euclidiano e P o ortocentro (ponto de intersecção das rectas que contêm as alturas do triângulo) de $\triangle ABC$.
Mostre que $m(\angle PAB) + m(\angle PBA) = m(\angle ACB)$.
3. Seja $\triangle ABC$ um triângulo do plano euclidiano e P o ortocentro de $\triangle ABC$. Mostre que as imagens de P por cada uma das reflexões relativamente às rectas que contêm os lados do triângulo estão na circunferência que circunscribe o triângulo.
4. Sejam l_1 e l_2 duas rectas paralelas e distintas do plano euclidiano P e m uma secante a l_1 e l_2 . Mostre que existe uma circunferência que é tangente simultaneamente a l_1 , l_2 e m . Quantas circunferências existem naquelas condições?
5. (a) Designe por *elementos* de um triângulo quer os seu lados quer os seus ângulos. Poderá existir um par de triângulos não congruentes em que 5 elementos de um dos triângulos são congruentes com 5 elementos do outro triângulo? (Supõe-se que, se dois elementos são congruentes, então eles são ambos lados ou ambos ângulos)
- (b) Dado um triângulo $\triangle ABC$, determine, caso seja possível, uma condição necessária e suficiente (envolvendo $\triangle ABC$) para que exista $\triangle DEF$ tais que $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ estejam nas condições da alínea a).
6. Sejam l_1 , l_2 e l_3 três rectas do plano euclidiano que se intersectam num mesmo ponto e A um ponto numa das rectas (que não coincida com o ponto de intersecção das rectas).
 - (a) Mostre que existe no máximo um triângulo tendo A como um dos vértices e cujas bissectrizes estão contidas nas rectas dadas.
 - (b) Indique uma condição necessária e suficiente (sobre as rectas l_1, l_2 e l_3 e o ponto A) para que exista um triângulo nas condições indicadas).