Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

GEOMETRIA - 1.º ano

Exame Final - *Duração*: 2h 30m. 03.02.2004

<u>Importante</u>: Justifique todas as suas afirmações e acompanhe as suas respostas de uma figura elucidativa dos raciocínios que efectuar.

1. (a) Defina conjunto convexo.

   (b) Enuncie o axioma de separação A6.

   (c) Num plano verificando os axiomas A1-A6, enuncie e demonstre o teorema de Pasch.

2. Sejam ΔABC e ΔDEF triângulos do plano euclidiano, $\overline{CP}$ a altura de ΔABC em C e $\overline{FQ}$ altura de ΔDEF em F (pode supor $P \in \overline{AB}$ e $Q \in \overline{DE}$).

   (a) Mostre que se $\Delta ABC \simeq \Delta DEF$ então $|CP| = |FQ|$.

   (b) Mostre que se $|CP| = |FQ|$, $|AC| = |DF|$ e $|BC| = |EF|$ então $\Delta ABC \simeq \Delta DEF$.

3. Sejam $\square ABCD$ um quadrilátero convexo e P um ponto do plano (verificando os axiomas A1 a A11).

   (a) Mostre que $|PA| + |PB| + |PC| + |PD| \geq |AC| + |BD|$.

   (b) Determine o ponto (ou os pontos) do plano para o qual a soma das distâncias aos vértices de $\square ABCD$ é mínima.

4. No plano euclidiano enuncie e demonstre o o critério lado-lado-lado (LLL) de semelhança de triângulos.

5. (a) Defina isometria no plano.

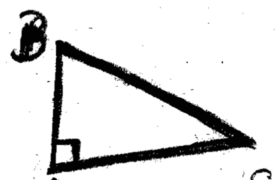
   É uma aplicação $f: E \to E$ $\forall P, Q$ $|PQ| = |f(P) f(Q)|$

   (b) Sejam A, B, C, D, E pontos do plano tais que C é o ponto médio de $\overline{AB}$, D e E estão do mesmo lado de l_{AB} e $\Delta ACD \simeq \Delta BCE$. Mostre que existe uma reflexão f tal que $f(\Delta ACD) = \Delta BCE$.

6. Demonstre o recíproco do teorema de Pitágoras: se para um triângulo do plano euclidiano ΔABC tivermos $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$ então ΔABC é rectângulo em A.

$|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$

(v. s. f. f.)



7. Sejam $\mathcal{C}(O, r)$ uma circunferência do plano euclidiano P um ponto exterior a $\mathcal{C}(O, r)$, e l uma tangente a $\mathcal{C}(O, r)$ que passa em P sendo Q o respectivo ponto de tangência. Considere uma recta m que intersecta $\mathcal{C}(O, r)$ em dois pontos R_1 e R_2 (com R_1 entre P e R_2).

   (a) Mostre que $\Delta PR_1Q \sim \Delta PQR_2$.

   (b) Mostre que $|PR_1| \times |PR_2| = |PQ|^2$. Conclua que o número $|PR_1| \times |PR_2|$ não depende da recta m considerada (a este número chama-se *potência* de P relativamente a $\mathcal{C}(O, r)$).

8. (a) Enuncie um dos axiomas do espaço euclidiano tridimensional $\mathcal{E}_3$.

   (b) Sejam α_1 e α_2 dois planos paralelos e distintos de $\mathcal{E}_3$. Mostre que qualquer plano perpendicular a α_1 também é perpendicular a α_2.

8a) Por cada par de pontos distintos passa uma e uma só recta
cada recta contém pelo ⊖ 2pts.