Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

GEOMETRIA

Exame Final 14.01.2005

Duração: 2h 30m.

Importante: Justifique todas as suas afirmações [illegible] as suas respostas de uma figura elucidativa dos raciocínios que efectuar.

1. (a) Enuncie dois dos axiomas da medição de ângulos A7 a A10.

   (b) Num plano verificando os axiomas A1-A10, mostre que ângulos verticalmente opostos são congruentes.

2. (a) Enuncie o axioma A11 sobre a congruência de triângulos.

   (b) Num plano verificando os axiomas A1 a A11 enuncie e demonstre o critério ângulo-lado-ângulo (ALA) de congruência de triângulos.

3. Sejam $\mathcal{E}$ um plano verificando os axiomas A1-A11, ΔABC um triângulo de $\mathcal{E}$, M o ponto médio de $\overline{AB}$ e D o ponto de l_{CM} tal que M é o ponto médio de $\overline{CD}$. Mostre que $\Delta ABC \simeq \Delta BAD$.

4. Demonstre a desigualdade triangular no caso de pontos não-colineares: Dados três pontos não-colineares, A, B, C, num plano verificando os axiomas A1 a A11, tem-se $|AB| < |AC| + |BC|$.

5. (a) Defina reflexão no plano.

   (b) Sejam A, B, C, D pontos do plano euclidiano distintos dois a dois, estando C e D do mesmo lado de l_{AB} e f a reflexão relativamente a l_{AB}. Mostre que $\Delta ABC \simeq \Delta BAD$ se e só se o quadrilátero $\square ACBf(D)$ for um paralelógramo.

6. Sejam ΔABC um triângulo do plano euclidiano, e l_1 e l_2 as rectas que contêm as bissectrizes dos ângulos externos de ΔABC com vértices em B e C respectivamente.

   (a) Mostre que l_1 e l_2 se intersectam.

   (b) Seja I o ponto de intersecção de l_1 com l_2. Mostre que a bissectriz de $\angle A$ também passa por I.

(v. s. f. f.)

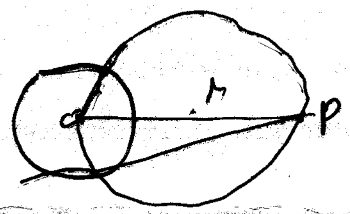
7. Sejam $\mathcal{C}(O, r)$ uma circunferência do plano euclidiano, P um ponto exterior a $\mathcal{C}(O, r)$, M o ponto médio de $\overline{OP}$ e Q um dos (dois) pontos de intersecção de $\mathcal{C}(O, r)$ com $\mathcal{C}(M, |MO|)$. Mostre que l_{PQ} é tangente a $\mathcal{C}(O, r)$.

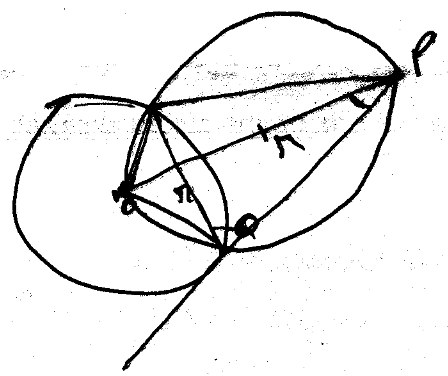
8. Sejam ΔABC e ΔDEF triângulos do plano euclidiano, $\overline{CP}$ a altura em C de ΔABC e $\overline{FQ}$ a altura em F de ΔDEF (pode supor que $P \in \operatorname{int}\overline{AB}$, $Q \in \operatorname{int}\overline{DE}$).

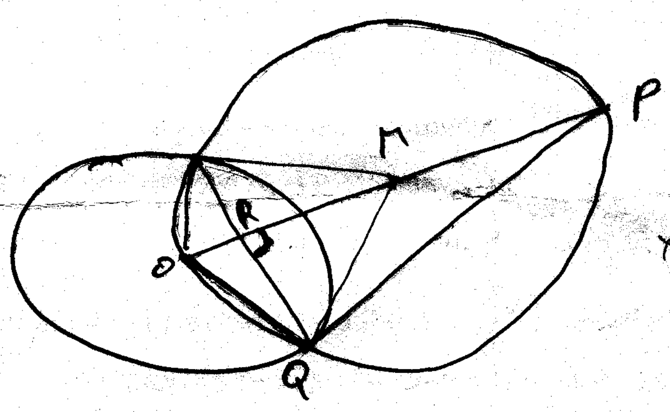
   (a) Mostre que se $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ então $\dfrac{|CP|}{|FQ|} = \dfrac{|AC|}{|DF|}$.

   (b) Mostre que se $\dfrac{|CP|}{|FQ|} = \dfrac{|AC|}{|DF|} = \dfrac{|AB|}{|DE|}$ então $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

9. Seja π um plano e P um ponto do espaço tridimensional $\mathcal{E}_3$. Mostre que existe uma e uma só recta perpendicular a π que passa em P.







↑. 2 cima →