Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

GEOMETRIA

(Licenciatura em Matemática)

2.ª Frequência 20.12.2006

Duração: 2h.

Importante: Justifique todas as suas afirmações e acompanhe as suas respostas de uma figura elucidativa dos raciocínios que efectuar.

1. (a) Defina isometria no plano.

   (b) Mostre que se uma ~~reflexão~~ isometria f fixar dois pontos distintos A e B então f fixa todos os pontos da recta l_{AB}.

2. Sejam $\mathcal{C}(O_1, r_1)$, $\mathcal{C}(O_2, r_2)$, circunferências, $O_1 \neq O_2$, l uma recta que é tangente a $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ num ponto P_1. Suponha que l intersecta $l_{O_1O_2}$ num ponto A e $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ num ponto P_2. Mostre que $\frac{|AO_1|}{|AO_2|} = \frac{r_1}{r_2}$ se e só se l é tangente a $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ em P_2.

3. Sejam l uma recta do plano euclidiano, $P \in l$ e $Q \notin l$.

   (a) Mostre que existe uma e uma só circunferência que passa em Q e é tangente a l in P.

   (b) Indique justificando se o raciocínio que utilisou na alínea anterior é válido num plano verificando apenas os axiomas A1 a A11.

4. Mostre que no plano euclidiano a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180.

5. Enuncie e demonstre o critério lado-ângulo-lado (LAL) de semelhança de triângulos do plano euclidiano.

6. Sejam ΔABC um triângulo do plano euclidiano, M e N os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, res pectivamente e G o baricentro (ponto de intersecção das medianas) de ΔABC.

   (a) Suponha que $|BN| = |CM|$. Mostre que ΔBCG e ΔMNG são isósceles de bases $\overline{BC}$ e $\overline{MN}$ respectivamente.

   Sugestão: Recorde que o baricentro verifica as relações seguintes: $|BG| = \frac{2}{3}|BN|$, $|CG| = \frac{2}{3}|CM|$

   (b) Mostre que se $|BN| = |CM|$ então ΔABC é isósceles de base $\overline{BC}$.