Geometria Algébrica

Primeira Frequência $\sim$ 4 de Novembro 2008

Não é permitida a consulta. Justifique devidamente as suas respostas.[1] Duração: 1h15m

1 Sejam $U \subset V \subset \mathbb{A}^n$ abertos não-vazios.

(a) Mostre que $\overline{U} = \overline{V} = \mathbb{A}^n$.

(b) Mostre que se $\varphi, \psi \in \mathcal{O}_V(V)$ são tais que $\varphi_{|U} = \psi_{|U}$ então $\varphi = \psi$.

2 Considere $U = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $\varphi \in \mathcal{O}_U(U)$.

(a) Seja $J_\varphi = \left\{ F \in \mathbb{K}[x,y] : \exists\, G \in \mathbb{K}[x,y] \text{ tal que } \varphi_{|V} = \frac{F}{G}, \text{ com } V \subset U \text{ aberto não-vazio} \right\} \cup \{0\}$. Mostre que J_φ é ideal.

(b) Mostre que $(x,y) \subset \operatorname{Rad} J_\varphi$.

(c) Mostre que $\mathcal{O}_U(U) = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}(\mathbb{A}^2)$.

3 Seja V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Denote por $\mathbb{P}(V)$ o conjunto dos subespaços de V de dimensão 1. Dada uma base, $\mathbf{v} = (v_0, \ldots, v_n)$, de V, considere $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(V)$ a aplicação dada por $(x_0, \ldots, x_n) \mapsto \mathcal{L}\{x_0 v_0 + \cdots + x_n v_n\}$, que é evidentemente sobrejectiva. Considere em $\mathbb{K}^{n+1}$ a estrutura de espaço afim $\mathbb{A}^{n+1}$ e tome em $\mathbb{P}(V)$ a estrutura quociente induzida. Denote o espaço com $\mathbb{K}$-funções assim obtido por $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}(V)$.

(a) Dadas duas bases, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, de V mostre que os espaços $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}(V)$ e $\mathbb{P}_{\mathbf{w}}(V)$ são isomorfos.

(b) Seja $W \subset V$ um subespaço (vectorial) de V. Mostre que $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$ é fechado em $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}(V)$ para qualquer escolha de base $\mathbf{v}$.

4 Considere em $\mathbb{P}^3$, $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ e $\mathbf{b} = (b_0, b_1, b_2, b_3)$, dois pontos distintos. Mostre que a recta que passa por $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ é dada pela condição:

$$\operatorname{rk} \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \leq 2.$$

5 Seja $C_3 \subset \mathbb{P}^3$ a curva normal racional de grau 3. Considere $\pi\colon C_3 \to \mathbb{P}^2$, a restrição a C_3 da projecção de $\mathbb{P}^3$ com centro no ponto $(0,1,0,0)$ no plano H de equação $x_1 = 0$. Denote por $\mathbb{P}^3_{x_i}$ o aberto dado por $\left\{ (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{P}^3 : x_i \neq 0 \right\}$.

(a) Determine $E(\pi(C_3)) \subset \mathbb{K}[x_0, x_2, x_3]$.

[1] $\mathbb{K}$ supõe-se sempre algebricamente fechado.