Ano lectivo 1997/98 **1ª Frequência de Álgebra**

12/2/98

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos

Duração: 2h30m

---

1. Considere o conjunto $\mathbb{Z}$ munido com a seguinte operação:

$$a \circ b = a + b - 1 \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

1 (a) Mostre que $(\mathbb{Z}, \circ)$ é um grupo.

2 (b) Prove que a aplicação $f : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, \circ)$ definida por $f(a) = a + 1$ é um isomorfismo de grupos.

3 (c) Conclua que $(\mathbb{Z}, \circ)$ é cíclico e indique o(s) seu(s) gerador(es).

2. Complete a seguinte tabela de Cayley de um grupo com quatro elementos a, b, c, d:

$*$	a	b	c	d
a	b	c	d	a
b	c	d	a	b
c	d	a	b	c
d	a	b	c	d

2,8

3. Sejam G um grupo, H um grupo abeliano e $f : G \to H$ e $g : G \to H$ homomorfismos. Prove que o conjunto $A = \{x \in G \mid f(x) = g(x)\}$ é um subgrupo normal de G.

3

4. Diga, justificando sucintamente, qual o valor lógico das seguintes afirmações:

4 (a) $(\mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}, \otimes_6)$ é um grupo abeliano;

5 (b) Sendo x um elemento de ordem finita de um grupo G, $\mathcal{O}(x^n) = \mathcal{O}(x)$ se e só se $\mathrm{mdc}(n, \mathcal{O}(x)) = 1$;

6 (c) Os únicos grupos que possuem exactamente três subgrupos distintos são os grupos cíclicos G tais que $|G| = p^2$ para algum primo p;

7 (d) Existem, no máximo, dois grupos abelianos de ordem 1998 não isomorfos entre si.

5. Seja $f : G \to H$ um homomorfismo de grupos. Como se define o núcleo de f? Prove que

$$G/Nuc\, f \cong Im\, f.$$

4,5

6. Apresente um exemplo:

8 (a) de um grupo e um seu subconjunto fechado para a operação do grupo mas que não seja seu subgrupo;

9 (b) de uma permutação par de ordem 4 em S_6;

10 (c) que mostre que nem sempre a soma $a + b$ de dois divisores de zero a e b de um anel $(A, +, .)$ é um divisor de zero.

(v.s.f.f.)