Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
1ª Frequênia de Álgebra

29/01/1999 **Duração: 2h30m**

[redacted] Considere o conjunto G das matrizes reais do tipo $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}$ com $ac \neq 0$.

1.5 [redacted] Prove que G é grupo para o produto usual de matrizes.

1.5 [redacted] Considere $H = \{A \in G : \det(A) = 1\}$. Mostre que H é um subgrupo normal de G.

0.2 [redacted] Prove que o grupo quociente G/H é isomorfo ao grupo $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$.

[redacted] Considere a permutação

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1 3 4)(2 5) ciclos disjuntos
(14)(13)(25) transposições

1.5 [redacted] Escreva-a como produto de ciclos disjuntos e como produto de transposições.

1.5 [redacted] Determine a tabela de Cayley do subgrupo H de S_5 gerado por σ.

1.5 [redacted] Indique as permutações pares do grupo H.

3. Seja G um grupo finito e $f : G \longrightarrow G'$ um homomorfismo de grupos.

1.5 [redacted] Prove que para todo $a \in G$, a ordem de $f(a)$ divide a ordem de a.

1 (b) Prove que se $G = \mathbb{Z}_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então o homomorfismo é definido por $f(m) = mf(1)$.

1 (c) Determine todos os homomorfismos de $\mathbb{Z}_8$ em $\mathbb{Z}_6$.

4. Averigúe se são verdadeiras ou falsas as seguintes proposições, justificando convenientemente.

1 (a) A_n é subgrupo normal de S_n.

1 (b) A imagem homomorfa de um grupo com dez elementos pode ter ordem três.

1 (c) Dados dois grupos G_1 e G_2, os grupos $G_1 \times G_2$ e $G_2 \times G_1$ são isomorfos.

1 (d) A menos de isomorfismo, existe um único grupo de ordem p para p inteiro primo.

3 [redacted] Determine três grupos abelianos não isomorfos de ordem 504. Indique os correspondentes factores invariantes e divisores elementares.

[redacted] Sejam K e L subgrupos de um grupo G e H um subgrupo normal de G.

2 [redacted] Mostre que HK é um subgrupo de G.

2 [redacted] Prove que se H está contido em L, então $HK \cap L = H(K \cap L)$.