Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

1ª Frequência de Álgebra (equivalente a Álgebra I actual)

Duração: 2h 30m   26/1/00

1. Seja

$$\mathcal{F} = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} | f(z) = az + b \text{ com } a, b \in \mathbb{C} \text{ e } a^4 = 1\}.$$

Mostre que:

(a) $\mathcal{F}$ é grupo para a composição de funções;

(b) $\mathcal{F}$ não é comutativo;

(c) $\mathcal{S} = \{g \in \mathcal{F} | g(z) = z + b\}$ é um subgrupo comutativo de $\mathcal{F}$.

2. Dadas as permutações $\alpha = (13)(14)(234)$ e $\beta = (15)(2431)$ determine:

(a) a sua ordem e paridade;

(b) a intersecção dos subgrupos gerados por α e β, isto é, $H = <\alpha> \cap <\beta>$.

3. Seja G o grupo cíclico de ordem 24 e m um inteiro positivo. Prove que:

(a) $\phi_m : G \to G$ tal que $\phi_m(g) = g^m$ é homomorfismo;

(b) ϕ_m é automorfismo se e só se m.d.c.$(24, m) = 1$;

(c) $\phi_6(G) \cong \mathbb{Z}_4$ e Nuc $\phi_6 \cong \mathbb{Z}_6$.

4. Averigúe se são verdadeiras ou falsas as seguintes proposições, justificando convenientemente a sua resposta.

(a) Num grupo cíclico todo o elemento é gerador.

(b) Todo o elemento de um grupo gera um subgrupo cíclico desse grupo.

(c) O número de classes laterais esquerdas de um subgrupo de um grupo finito é um divisor da ordem do grupo.

(d) Se H é um subgrupo normal do grupo G e $[G : H] = n$ então $a^n \in H$ para todo o elemento $a \in G$.

5. Seja $G = \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_7$.

(a) Indique os factores invariantes de G.

(b) Determine todos os subgrupos de G, não isomorfos, de ordem 45.

6. Sejam H e K subgrupos de um grupo G. Se K é subgrupo normal de G prove que:

(a) $H \cap K$ é subgrupo normal de H;

(b) HK é subgrupo de G;

(c) $HK/_K$ é isomorfo a $H/_{(H \cap K)}$.