Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Exame Especial de Álgebra I
Licenciatura em Matemática

2 de Outubro de 2001 Duração: 2h 30m

Justifique convenientemente as suas afirmações.

1. Consider o conjunto $X = \mathbb{R} - \{1\}$ com a operação $*$ definida por $a * b = ab - a - b + 2$.
   (a) Prove que a operação está bem definida.
   (b) Prove que $(X, *)$ é um grupo.
2. (a) Indique quantos elementos de S_5 têm ordem 6. $= \frac{5!}{6} = \frac{120}{6} = 20$
   (b) Calcule a ordem e a paridade da permutação
$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$
3. Seja G um grupo abeliano de ordem finita.
   (a) Prove que o subconjunto H de G constituído pelos elementos de ordem ímpar é um subgrupo normal de G.
   (b) Prove que a ordem dos elementos de G/H é um número da forma 2^n, $n \in \mathbb{N}_0$.
4. (a) Decomponha o grupo cíclico de ordem 60 num produto de dois ou mais grupos cíclicos, de todas as formas possíveis.
   (b) Mostre que $C_2 \oplus C_{10}$ não é cíclico e determine um elemento de ordem máxima.
   (c) Determine dois grupos abelianos não isomorfos de ordem 60, indicando os respectivos factores invariantes e divisores elementares.
5. Prove que um grupo G de ordem 20 tem necessariamente um subgrupo normal próprio.
6. (a) Defina homomorfismo de grupos.
   (b) Prove que se $f : G \to L$ é um homomorfismo de grupos, então $f(a)^{-1} = f(a^{-1})$ para todo o elemento a de G.
7. Sejam H e K dois subgrupos normais de um grupo G tais que $G = HK$. Prove que a primeira proposição abaixo implica a segunda:
   1) Cada elemento de G pode ser escrito, de modo único, na forma hk com $h \in H$ e $k \in K$.
   2) Existe um isomorfismo $\phi : G \to H \times K$ tal que

$$\phi(H) = \{(h, e) : h \in H\}$$ $a : a^k$

$o(a) = k$
$o(b) = l$
$o(a) \cdot o(b) = \text{mmc}(o(a), o(b))$

e

$$\phi(K) = \{(e, k) : k \in K\}.$$

$\text{mmc}(k, l)$

$(1,3) \cdot 3$