Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Álgebra I

Exame

08/01/2001 — Duração: 2h 30m

1. Considere o conjunto

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\},$$

com a operação $\times$, produto usual de matrizes.

(a) Prove que $(H, \times)$ é um grupo.

(b) Defina uma operação $*$ em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (produto cartesiano) de modo que $(H, \times)$ seja isomorfo a $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, *)$.

(c) Determine o centro C de H.

? → (d) Prove que o grupo quociente H/C é abeliano.

2. Considere o grupo simétrico S_8 e os seus elementos

$$\alpha = (123)(2567) \quad \text{e} \quad \beta = (24)(568).$$

(a) Determine a ordem e a paridade de α e β. Justifique.

(b) Determine um elemento ρ de S_8 que satisfaça $\rho\alpha = \beta$. Justifique.

3. Considere os grupos $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{C}, \cdot)$ munidos com as operações usuais de adição de reais e multiplicação de complexos. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \theta &\longmapsto \cos(2\pi\theta) + i\ \text{sen}(2\pi\theta). \end{aligned}$$

(a) Mostre que f é um homomorfismo.

(b) Conclua que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$, onde $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

$2, 3, 2^2, 3, 2, 5$

$2^2, 2, 2$

$3, 3$

5

$60\cdot, \cdot 2$

4. Representando o grupo cíclico de ordem n por C_n, considere o grupo

$$G = C_6 \oplus C_{12} \oplus C_{10}.$$

(a) Determine os divisores elementares e os factores invariantes de G.

(b) Dê um exemplo de um grupo abeliano com a mesma ordem de G, mas não isomorfo a G.

5. Prove que um grupo K de ordem 20 tem necessariamente um subgrupo próprio normal.

6. Seja G um grupo e H um seu subgrupo de índice 2. Prove que H é normal.

→ 7. Seja G um grupo abeliano de ordem n e suponhamos que n se decompõe em factores primos do seguinte modo:

$$n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r}.$$

Prove que

$$G = S(p_1) \oplus S(p_2) \oplus \cdots \oplus S(p_r),$$

onde $S(p_i)$ representa o subgrupo de G constituído por 0 e por todos os elementos de G cuja ordem é uma potência de p_i.