(a partir deste não há resolução)

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Exame de Álgebra I
Licenciatura em Matemática

29 de Janeiro de 2001 Duração: 2h 30m

Justifique convenientemente todas as suas respostas.

1. Considere o grupo simétrico S_5.
   (a) Determine os elementos do subgrupo H gerado por
   $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
   (b) Indique dois subgrupos não triviais de H.
   (c) Indique um subgrupo K de S_5 com 6 elementos e não isomorfo a H. Justifique.

2. Averigúe se são cíclicos os seguintes grupos e, nos casos afirmativos, determine todos os geradores:
   $$(3\mathbb{Z}, +) \qquad (\mathbb{Q}^+, \times) \qquad (\mathbb{Z}_{12}, \oplus_{12}).$$
   Justifique a resposta.

3. Considere um grupo G. Dado um elemento $g \in G$, seja i_g a função de G para G definida por
   $$i_g(x) = gxg^{-1}.$$
   (a) Prove que $i_g : G \to G$ é um automorfismo de G.
   (b) Considere o conjunto $\mathcal{K}$ de todas as funções i_g com a operação "composição de funções". Prove que, com esta operação, $\mathcal{K}$ é um grupo.
   (c) Seja C o centro de G. Prove que
   $$G/C \cong \mathcal{K}.$$

4. Considere o grupo cíclico de ordem 60, que designamos por C_{60}. Escreva todas as somas directas de dois ou mais grupos cíclicos que sejam isomorfas de C_{60}. Justifique.

5. Seja S_3 o grupo simétrico de grau 3 e C_4 o grupo cíclico de ordem 4. Considere o produto directo $S_3 \times C_4$. Escreva duas séries de composição deste grupo. Justifique.

6. Seja G um grupo e a um elemento de G de ordem finita que designamos por n. Seja r um inteiro positivo e $b = a^r$. Diga qual é a ordem de b e justifique.

7. Seja G um grupo e sejam H e K dois subgrupos distintos e ambos normais maximais. Prove que:
   (a) O conjunto $H \cap K$ é subgrupo normal de G;
   (b) Os grupos quociente $G/_H$ e $K/_{H \cap K}$ são isomorfos.