Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Exame de Álgebra I
Licenciatura em Matemática

14/1/2002 Duração: 2h 30m

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Considere o grupo simétrico S_7.

   (a) Determine a ordem e a paridade da permutação $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 3 & 5 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Considere o subgrupo H gerado por σ. Será H um subgrupo normal no grupo alternante A_7? não

   (c) Seja $G = \{\varphi \in S_7 \ : \varphi(3) = 3\}$. Determine o número de elementos de G e verifique que é um subgrupo de S_7. 6!

2. Averigúe se são verdadeiras ou falsas as seguintes proposições, justificando convenientemente a sua resposta. (Nota: em $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_n$ considera-se sempre a operação $+$).

   F (a) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_4$ tem exactamente 6 elementos de ordem finita.

   V (b) $\mathbb{Z}_{60}$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_5$.

   F (c) A classe lateral $5 + < 4 >$ do grupo quociente $\mathbb{Z}_{12}/ < 4 >$ tem ordem 4.

   V (d) Nenhum grupo de ordem 14 é simples.

3. Seja $G = \{(x, y, z) \ : x, y, z \in \mathbb{Z}\}$ e considere a operação $(x, y, z) * (a, b, c) = (x + (-1)^x a, y + b, z + c)$ definida no conjunto G.

   (a) Mostre que $(G, *)$ é um grupo.

   (b) Considere o subgrupo $H =< (1, 0, 0) >$. Prove que H é normal em G.

   (c) Mostre que o grupo quociente G/H é infinito. G/H é cíclico e H infinito logo G/H é infinito.

4. Sejam G e H dois grupos finitos e $f : G \longrightarrow H$ um homomorfismo.

   (a) Prove que, para qualquer $a \in G$, a ordem de $f(a)$ divide a ordem de a.

   (b) Mostre que, se $mdc(|G|, |H|) = 1$, existe um e um só homomorfismo de G em H.

5. Seja G um grupo não abeliano de ordem p^3, sendo p um primo. Designando o centro de G por $Z(G)$, prove que:

   (a) $|Z(G)| \neq p^3$.

   (b) $|Z(G)| \neq p^2$

   (c) $|Z(G)| \neq 1$

   (d) Qual a ordem de $Z(G)$? $= p$

6. Prove que se um grupo é de ordem prima, então é cíclico.

7. (a) Defina série de composição de um grupo e demonstre que todo o grupo finito tem pelo menos uma.

   (b) Enuncie (sem demonstrar) o Teorema de Jordan-Hölder. ?