Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Exame Álgebra I

Licenciatura em Matemática

4/2/2002 Duração: 2h30m

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Considere o grupo simétrico S_4 e seja $\sigma = (1\ 2)(1\ 3\ 4)(2\ 4)(1\ 2)$.
   (a) Determine a ordem da permutação σ.
   (b) Seja $H = <\sigma>$. Diga se H é um subgrupo do grupo alternante A_4.
   (c) Considere a permutação $\theta = (1\ 4)(2\ 3)$ de S_4. Verifique se as permutações σ e θ são conjugadas.

2. Averigúe se são verdadeiras ou falsas as seguintes proposições, justificando convenientemente a sua resposta. (Nota: em $\mathbb{Z}_n$ considera-se sempre a operação $+$).
   (a) $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_8$ é isomorfo a S_4.
   (b) Existe um subgrupo cíclico de $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{15}$ com ordem 60.
   (c) O subgrupo $H = \{(1),\ (1\ 2)\}$ de S_3 é um 2-subgrupo de Sylow.
   (d) A imagem de um grupo de ordem 6 por um homomorfismo pode ter 4 elementos.

3. Sejam G um grupo e F o grupo dos automorfismos de G. Consideremos o conjunto $H = \{(x, f) : x \in G,\ f \in F\}$ e definamos uma operação em H por $(x, f) * (y, g) = (xf(y), f \circ g)$.
   (a) Mostre que $(H, *)$ é um grupo.
   (b) Considere o conjunto $\tilde{H} = \{(x, i) : x \in G\}$, onde $i : G \longrightarrow G$ é a aplicação identidade. Mostre que $\tilde{H}$ é um subgrupo normal de H.
   (c) Mostre que $\tilde{H} \cong G$ e $H/\tilde{H} \cong F$.

4. (a) Determine, a menos de isomorfismo, todos os grupos abelianos de ordem 252.
   (b) Para cada um desses grupos, indique (se existir) um elemento de ordem 21.

5. Seja G um grupo de ordem 52.
   (a) Quantos 13-subgrupos de Sylow existem em G?
   (b) Sabendo que G contém um subgrupo normal de ordem 4, mostre que G é comutativo.

6. Demonstre o Teorema de Cayley (todo o grupo é isomorfo a um grupo de permutações no conjunto dos seus elementos).

7. Seja G um grupo abeliano de ordem n e seja $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}$ a factorização de n em primos. Prove que $G = S(p_1) + S(p_2) + \dots + S(p_r)$. [Note bem: não se pede que prove que a soma é directa].