Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Exame de Álgebra I

Licenciatura em Matemática

28/1/2003 | Duração: 2h 30m

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Considere o conjunto G constituído pelas matrizes do tipo $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, com $n \in \mathbb{Z}$.

   (a) Mostre que G é um grupo para o produto usual de matrizes.

   (b) Prove que o conjunto $T = \{\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in 2\mathbb{Z}\}$ é um subgrupo normal de G e determine o conjunto quociente G/T.

2. Considere a permutação $\sigma = (153)(142)(316)$ do grupo simétrico S_6.

   (a) Determine a ordem e a paridade de σ.

   (b) Escreva a tabela de Cayley do subgrupo de S_6 gerado por σ.

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definida por $f(x) = cos(2\pi x) + isen(2\pi x)$.

   (a) Mostre que f é um homomorfismo do grupo aditivo dos reais no grupo multiplicativo dos complexos não nulos.

   (b) Determine a imagem e o núcleo de f.

   (c) Prove que $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, .)$ é produto directo dos subgrupos $Im(f)$ e $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

4. Determine, a menos de isomorfismo, todos os grupos abelianos de ordem 360 indicando os respectivos divisores elementares e factores invariantes.

5. Para cada uma das afirmações seguintes, diga se é verdadeira ou falsa, justificando a sua resposta.

   (a) Os grupos aditivos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são isomorfos.

   (b) Existe um homomorfismo $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_5$ tal que $f(1) = 2$.

   (c) O grupo $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{12}$ tem um elemento de ordem 20.

   (d) Se todo o subgrupo cíclico de um grupo G é normal, então todo o subgrupo de G é normal.

6. Sendo G um grupo de ordem 143, mostre que:

   (a) G contém um único subgrupo-11 de Sylow.

   (b) G é cíclico.

7. Seja p um primo. Prove que todo o subgrupo-p de um grupo finito G tem ordem uma potência de p, e indique a ordem dos subgrupos-p de Sylow de G.

Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Exame de Álgebra I
Licenciatura em Matemática

28/1/2003 Duração: 2h 30m

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Considere o conjunto G constituído pelas matrizes do tipo $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, com $n \in \mathbb{Z}$.
   (a) Mostre que G é um grupo para o produto usual de matrizes.
   (b) Prove que o conjunto $T = \{\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in 2\mathbb{Z}\}$ é um subgrupo normal de G e determine o conjunto quociente G/T.

2. Considere a permutação $\sigma = (153)(142)(316)$ do grupo simétrico S_6.
   (a) Determine a ordem e a paridade de σ.
   (b) Escreva a tabela de Cayley do subgrupo de S_6 gerado por σ.

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definida por $f(x) = cos(2\pi x) + isen(2\pi x)$.
   (a) Mostre que f é um homomorfismo do grupo aditivo dos reais no grupo multiplicativo dos complexos não nulos.
   (b) Determine a imagem e o núcleo de f.
   (c) Prove que $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, .)$ é produto directo dos subgrupos $Im(f)$ e $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

4. Determine, a menos de isomorfismo, todos os grupos abelianos de ordem 360 indicando os respectivos divisores elementares e factores invariantes.

5. Para cada uma das afirmações seguintes, diga se é verdadeira ou falsa, justificando a sua resposta.
   (a) Os grupos aditivos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são isomorfos.
   (b) Existe um homomorfismo $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_5$ tal que $f(1) = 2$.
   (c) O grupo $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{12}$ tem um elemento de ordem 20.
   (d) Se todo o subgrupo cíclico de um grupo G é normal, então todo o subgrupo de G é normal.

6. Sendo G um grupo de ordem 143, mostre que:
   (a) G contém um único subgrupo-11 de Sylow.
   (b) G é cíclico.

7. Seja p um primo. Prove que todo o subgrupo-p de um grupo finito G tem ordem uma potência de p, e indique a ordem dos subgrupos-p de Sylow de G.