Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Exame de Álgebra I

Licenciatura em Matemática

18/2/2003 Duração: 2h 30m

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Considere o conjunto G constituído pelas matrizes do tipo $\begin{pmatrix} n & m \\ -m & n \end{pmatrix}$, com $n, m \in \mathbb{Z}$.

   (a) Mostre que G é um grupo para a soma usual de matrizes.

   (b) Prove que o conjunto $T = \{\begin{pmatrix} 0 & m \\ -m & 0 \end{pmatrix} : m \in \mathbb{Z}\}$ é um subgrupo normal de G e determine o grupo quociente G/T.

   (c) Mostre que o grupo quociente G/T é isomorfo a T.

2. Dado um grupo G seja $Aut(G)$ o grupo dos automorfismos de G. Considere a função

$$\begin{aligned} \varphi : \ & G \to Aut(G) \\ & g \mapsto i_g \end{aligned}$$

   sendo $i_g : G \to G$ definida por $i_g(x) = gxg^{-1}$. Prove que φ é um homomorfismo e determine o seu núcleo.

3. Descreva um grupo quociente, não trivial, de $\mathbb{Z}_{21}$.

4. Determine dois grupos abelianos, não isomorfos, de ordem 36 que contenham um elemento de ordem 12, indicando os correspondentes factores invariantes.

5. Para cada uma das afirmações seguintes, diga se é verdadeira ou falsa, justificando a escolha feita.

   (a) As permutações pares constituem um subgrupo abeliano de S_3.

   (b) Se todo o subgrupo próprio do grupo G é cíclico então G é cíclico.

   (c) Existe um grupo abeliano de ordem n para todo o $n \geq 1$.

   (d) Se H é subgrupo de K, K é subgrupo de G e G é um grupo finito, então $[G : H] = [G : K][K : H]$.

6. Seja G um grupo de ordem 45.

   (a) Mostre que G contém um subgrupo normal H tal que $[G : H] = 5$.

   (b) Prove que G contém um subgrupo de ordem 15.

7. Seja G um grupo abeliano de ordem mn com $m.d.c.(m, n) = 1$. Prove que G é produto directo interno de dois subgrupos H e K de ordens m e n respectivamente.