Álgebra I - Exame >> época de recurso

duração: 2h 30m

2,5 1. Verifique que as matrizes 2×2:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

com a, b, c, $d \in \mathbb{Z}$ e $ad - bc = 1$, formam um grupo para a multiplicação de matrizes.

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determine a ordem do subgrupo gerado por AB.

2,5 2. Seja $\alpha = (12934)(237)$ e $\beta = (1456)(23674)$ permutações de S_9. Determine:

a ordem do elemento α^2.

a paridade da permutação $\alpha\beta^{-1}$.

3. Mostre que $\phi : G \to H$ é um homomorfismo se e só se $\{(x, \phi(x)) | x \in G\}$ é subgrupo de $G \times H$.

1,5 Seja H um subgrupo de um grupo finito G. Sejam $a \in G$ e m o menor inteiro positivo tal que $a^m \in H$. Prove que m divide $O(a)$ em G.

5. Seja G um grupo, $A = G \times G$ e $T = \{(g, g) | g \in G\}$. Mostre que:

Se A é cíclico então G é também cíclico.

(b) Se $T \lhd A$ então G é abeliano.

1,5 6. Diga, *justificando*, se são verdadeiras ou falsas as afirmações:

0,5 Todo o grupo de ordem 6 é isomorfo a $\mathbb{Z}_6$. F $|D_3| = 6$ e, $\mathbb{Z}_6$ é cíclico e D_3 não é cíclico $D_3 \not\cong$

0,5 Os subgrupos não triviais de $\mathbb{Z}$ são isomorfos a $\mathbb{Z}$. V. Todo o subgrupo de $\mathbb{Z}$ é cíclico.

1 Existe um homomorfismo sobrejectivo $f : \mathbb{Z}_{21} \to \mathbb{Z}_5$. F ? ?

0,5 $\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_{78}$ é um grupo cíclico F. mdc $(24, 78) \neq 1$, logo não é cíclico

0,5 O grupo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tem ordem infinita. ✓. $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong$ Im φ

7. Seja $P \lhd G$ e P um p-subgrupo de Sylow. Prove que $\phi(P) = P$ para todo o automorfismo ϕ de G.

8. (a) Mostre que o grupo abeliano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{14}$ é finitamente gerado e determine a sua característica e os seus coeficientes de torsão.

(b) Indique um elemento de ordem 35 desse grupo.