Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Exame de Álgebra I
Licenciatura em Matemática

20/1/2004 Duração: 2h 30m

**Importante:** Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Considere o conjunto $\mathbb{Q}^+$ dos racionais positivos e a operação $*$ definida por: $a * b = \frac{ab}{3}$.
   (a) Prove que $(\mathbb{Q}^+, *)$ é grupo.
   (b) Descreva o subgrupo gerado por $X = \{1\}$.
   (c) Determine um grupo, diferente de $(\mathbb{Q}^+, *)$, isomorfo a $(\mathbb{Q}^+, *)$.

2. Prove que o grupo dos automorfismos de um grupo cíclico é abeliano.

3. Seja $S_5$ o grupo simétrico de ordem 5.
   (a) Determine os elementos do subgrupo $H$ gerado por $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
   (b) Indique dois subgrupos não triviais de $H$.
   (c) Prove que $S_5/A_5$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_2$, sendo $A_5$ o subgrupo das permutações pares.

4. Seja $G = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{12}$.
   (a) Indique os divisores elementares e os factores invariantes de $G$.
   (b) Determine um elemento de $G$ com ordem 6.
   (c) Determine um grupo não isomorfo a $G$ e com a mesma ordem.

5. Averigúe se são verdadeiras ou falsas as seguintes proposições, justificando a sua resposta.
   (a) Se $a$ e $b$ forem elementos de um grupo $G$, com $O(a) = m$ e $O(b) = n$, respectivamente, então $O(ab) = mn$.
   (b) Se $H$ é subgrupo de índice 2 de um grupo $G$, então $ab \in H$ se $a \notin H$ e $b \notin H$.
   (c) Todo o grupo cíclico é abeliano.
   (d) Se $G$ é um grupo de ordem par, então existe um elemento diferente da identidade que é inverso de si próprio.

6. Seja $G$ um grupo de ordem 52. Sabendo que $G$ contém um subgrupo normal de ordem 4, mostre que $G$ é comutativo.

7. Prove que um grupo $G \neq \{e\}$ sem subgrupos não triviais, é um grupo cíclico finito de ordem prima.

Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Exame de Álgebra I

Licenciatura em Matemática

20/1/2004 Duração: 2h 30m

**Importante:** Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Considere o conjunto $\mathbb{Q}^+$ dos racionais positivos e a operação $*$ definida por: $a * b = \frac{ab}{3}$.
   (a) Prove que $(\mathbb{Q}^+, *)$ é grupo.
   (b) Descreva o subgrupo gerado por $X = \{1\}$.
   (c) Determine um grupo, diferente de $(\mathbb{Q}^+, *)$, isomorfo a $(\mathbb{Q}^+, *)$.

2. Prove que o grupo dos automorfismos de um grupo cíclico é abeliano.

3. Seja $S_5$ o grupo simétrico de ordem 5.
   (a) Determine os elementos do subgrupo $H$ gerado por $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
   (b) Indique dois subgrupos não triviais de $H$.
   (c) Prove que $S_5/A_5$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_2$, sendo $A_5$ o subgrupo das permutações pares.

4. Seja $G = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{12}$.
   (a) Indique os divisores elementares e os factores invariantes de $G$.
   (b) Determine um elemento de $G$ com ordem 6.
   (c) Determine um grupo não isomorfo a $G$ e com a mesma ordem.

5. Averigúe se são verdadeiras ou falsas as seguintes proposições, justificando a sua resposta.
   (a) Se $a$ e $b$ forem elementos de um grupo $G$, com $O(a) = m$ e $O(b) = n$, respectivamente, então $O(ab) = mn$.
   (b) Se $H$ é subgrupo de índice 2 de um grupo $G$, então $ab \in H$ se $a \notin H$ e $b \notin H$.
   (c) Todo o grupo cíclico é abeliano.
   (d) Se $G$ é um grupo de ordem par, então existe um elemento diferente da identidade que é inverso de si próprio.

6. Seja $G$ um grupo de ordem 52. Sabendo que $G$ contém um subgrupo normal de ordem 4, mostre que $G$ é comutativo.

7. Prove que um grupo $G \neq \{e\}$ sem subgrupos não triviais, é um grupo cíclico finito de ordem prima.