plano antigo

Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Exame de Álgebra I

Licenciatura em Matemática

9/2/2004 Duração: 2h 30m

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Seja $G = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a \neq 0\}$ e considere a operação $*$ definida por $(a, b) * (c, d) = (ac, b + d)$.
   (a) Mostre que $(G, *)$ é um grupo.
   (b) Prove que G tem um e um só subgrupo de ordem 2 e não possui qualquer subgrupo de ordem 3.
   (c) Designando por H o subgrupo de ordem 2 de G, mostre que H é normal e determine o grupo quociente G/H.

2. Seja S_5 o grupo simétrico de ordem 5.
   (a) Determine a ordem e a paridade da permutação $\alpha = (125)(24)$.
   (b) Sendo $\beta = (23)$, determine $\alpha\beta\alpha^{-1}$.
   (c) Averigúe se o subgrupo $H =< \beta >$ é normal em S_5.

3. Averigúe se os seguintes grupos são cíclicos e, nos casos afirmativos, determine todos os geradores:
   (a) $(\{3^n : n \in \mathbb{Z}\})$;
   (b) $(\mathbb{Z}_6, \oplus_6)$;
   (c) S_3.

4. (a) Sejam G e H dois grupos finitos. Mostre que, se $mdc(|G|, |H|) = 1$, existe um e um só homomorfismo de G em H.
   (b) Determine todos os homomorfismos entre os grupos $\mathbb{Z}_4$ e $\mathbb{Z}_6$.

5. Averigúe se são verdadeiras ou falsas as seguintes proposições, justificando a sua resposta.
   (a) Todo o elemento de um grupo gera um subgrupo cíclico desse grupo.
   (b) No grupo simétrico de grau 7 existe um elemento de ordem 12.
   (c) Um grupo de ordem seis tem exactamente dois subgrupos próprios.
   (d) Todo o grupo abeliano é cíclico.

6. Determine, a menos de isomorfismo, todos os grupos comutativos de ordem 56 que contêm um elemento de ordem 28.

7. Mostre que um grupo de ordem 126 contém um subgrupo normal.