Álgebra I - Exame de 15 de Junho de 2005

Esquema de resolução

1. Seja G o subconjunto de $GL_3(\mathbb{R})$ constituído pelas matrizes da forma $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

   (a) Mostre que G é um grupo para a multiplicação usual de matrizes.

   (b) Prove que G é isomorfo a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

1.(a) Como $GL_3(\mathbb{R})$ é grupo para a multiplicação de matrizes, basta provar que G é subgrupo:

(i) $GL_3(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ pois contém a matriz identidade;

(ii) o produto de $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ pela inversa de $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & a_2 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz $\begin{bmatrix} 1 & a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ que pertence a G;

portanto G é grupo para esta operação.

1.(b) $f : G \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por $f(A) = (a, b)$ é uma função bijectiva e, como $A_1 \times A_2 = \begin{bmatrix} 1 & a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, temos que $f(A_1 + A_2) = f(A_1) + f(A_2)$.

2. Sejam r e s dois elementos de S_4 tais que $r = (123)$ e $s = (12)$.

   (a) Prove que $sr = r^2 s$.

   (b) Determine:

      i. o subgrupo H de S_4 gerado por r e s;

      ii. o subgrupo conjugado de H por $\sigma = (14)$;

      iii. a ordem dos elementos pares de H.

2.(a) É só calcular.

2.(b)

(i) O grupo H é isomorfo ao grupo diedral D_3: ele é gerado por dois elementos, r de ordem 3 e s de ordem dois, tais que $sr = r^2 s$. Assim $H = \{e, r, r^2 = (132), s, rs = (13), r^2 s = (23)\}$.

(ii) $\sigma H \sigma^{-1} = \{(\varepsilon), (234), (432), (24), (43), (23)\}$. (Cálculos simples: $\sigma\theta\sigma^{-1}$ para θ em H obtém-se substituindo 1 por 4 e 4 por 1 em θ.)

(iii) Os elementos pares são ε, $(123) = (13)(12)$ de ordem 3 e $(132) = (12)(13)$ também de ordem 3.

3. (a) Seja H um subgrupo cíclico de um grupo G. Mostre que, se H é normal em G então qualquer subgrupo de H é também normal em G.

   (b) Prove que o subgrupo de D_6 gerado por r^3 é normal em D_6.

3.(a) Seja $H = < a >$ e K um seu subgrupo. Como qualquer subgrupo de um grupo cíclico é cíclico, $K = < a^n >$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

Sejam $g \in G$ e $a^{tn} \in K$. Então

$$ga^{tn}g^{-1} = (gag^{-1})^{tn} = (a^s)^{tn},$$

uma vez que H é normal. Assim $ga^{tn}g^{-1} \in K$ e K é normal em G.

3.(b) O subgrupo $< r >$ de D_6 tem índice 2, logo é normal em D_6. Como $< r^3 >$ é subgrupo de $< r >$, estamos nas condições da alínea anterior e podemos concluir que $< r^3 >$ é normal em D_6.

4. Seja G um grupo cíclico de ordem 13 e m um inteiro positivo. Prove que

   (a) $f_m : G \to G$ tal que $f_m(g) = g^m$ é um homomorfismo;

   (b) f_m é um isomorfismo se e só se 13 não divide m.

4.(a) $f_m(g_1g_2) = f_m(g_1)f_m(g_2)$ porque $f_m(g_1g_2) = (g_1g_2)^m$, $f_m(g_1)f_m(g_2) = {g_1}^m{g_2}^m$ e $(g_1g_2)^m = {g_1}^m{g_2}^m$, uma vez que G sendo cíclico é abeliano.

4.(b) Para todo o elemento $g \neq e$, $g^m = e$ se e só se m é múltiplo de 13 porque a ordem de g tem de ser um divisor da ordem do grupo.

O homomorfismo f_m é injectivo se e só se $Nucf_m = \{g | g^m = e\} = \{e\}$ e isto ocorre se e só se 13 não divide m. Nesse caso, ele é um isomorfismo porque qualquer função injectiva de um conjunto FINITO em si próprio é também sobrejectiva, logo bijectiva.

5. Diga, *justificando*, se são verdadeiras ou falsas as afirmações:

   (a) As transposições de S_n geram S_n.

   (b) Se H é um subgrupo normal de G e o índice de H em G é n então $a^n \in H$, para todo o $a \in G$.

   (c) Existe um homomorfismo $f : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_3$ tal que $f(1) = 2$.

   (d) $\mathbb{Z}$ tem subgrupos finitos não triviais.

5.(a)Verdadeira: Toda a permutação pode ser escrita com produto de ciclos disjuntos, de forma única a menos da ordem dos factores. Cada um dos ciclos $(a_1a_2 \cdots a_s)$ em que se decompõe pode escrever-se como produto de transposições

$$(a_1a_2 \cdots a_s) = (a_1a_s) \cdots (a_1a_3)(a_1a_2).$$

5.(b) Verdadeira: como G/H é um grupo de ordem n, a ordem de qualquer dos seus elementos divide n. Portanto $(aH)^n = H$, para qualquer elemento aH, isto é, $(aH)^n = a^nH = H$. Logo $a^n \in H$.

5.(c) Falsa: Se f fosse um homomorfismo a ordem de $f(1)$ seria um divisor da ordem de 1, pois $0 = f(0) = f(8 \cdot 1) = 8f(1)$, mas $8 \cdot 2 = 1 (mod\, 3)$.

5.(d) Falsa: Os subgrupos não triviais de $\mathbb{Z}$ são da forma $n\mathbb{Z}$ para algum inteiro $n > 1$ portanto infinitos.

6. Considere o grupo $G = \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}^2$. Determine:

   (a) os coeficientes de torsão de G;

   (b) um elemento de ordem 20;

   (c) um elemento de ordem 30.

6.(a) $8 \times 3 \times 25 = 600$ ($G \cong \mathbb{Z}_{600} \times \mathbb{Z}^2$).

6.(b) (2, 0, 5, 0, 0) tem ordem $20 = m.m.c(4, 1, 5, 1, 1)$ pois a ordem de 2 em $\mathbb{Z}_8$ é quatro, a de 5 em $\mathbb{Z}_{25}$ é 5 e os elementos neutros têm ordem 1.

6.(c) (4, 1, 5, 0, 0) tem ordem $30 = m.m.c.(2, 3, 5, 1, 1)$.

7. Classifique os grupos de ordem 35.

   Grupos abelianos: $\mathbb{Z}_{35} \cong \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_5$ porque $m.d.c.(5, 7) = 1$.

   Pelos teoremas de Sylow que dizem...

   1. um tal grupo G tem um subgrupo H de ordem 7 e um subgrupo de ordem 5;

   2. o número de grupos de ordem 7 é $t \equiv 1 (mod\, 7)$ tal que $t|5$. Logo t=1 e portanto H é subgrupo normal de G;

   3. o número de grupos de ordem 5 é $t \equiv 1 (mod\, 5)$ tal que $t|7$. Logo t=1 e portanto K é subgrupo normal de G;

   4. $H \cap K = \{e\}$: $H \cong \mathbb{Z}_7$, $K \cong \mathbb{Z}_5$ e o único elemento cuja ordem divide 5 e 7 é o neutro;

   5. $G = KH$: se $K =< a >$,

   $$G = H \cup aH \cup a^2H \cup a^3H \cup a^4H$$

   porque quaisquer duas destas classes têm 7 elementos e são disjuntas 2 a 2, pois $a^iH = a^jH$...;

   6. $hk = kh$ para todo o $h \in H$ e $k \in K$: de facto

   $$hkh^{-1}k^{-1} \in H \cap K$$

   porque, pela normalidade de H, $kh^{-1}k^{-1} \in H$ e, pela normalidade de K, $hkh^{-1} \in K$.

   Conclusão: de 4, 5 e 6 conclui-se que

   $$G \cong K \times H \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$$

   portanto há , a menos de isomorfismo, um grupo de ordem 35.