Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

ÁLGEBRA I

Exame

14/06/2006 Duração: 2h 30m

1. Considere o grupo $G = (\mathbb{Z}_{11}\backslash\{0\}, \otimes_{11})$.
   (a) Mostre que G é cíclico.
   (b) Indique um subgrupo de G de ordem 5.
   (c) Será única a resposta à alínea anterior?

2. Indique o valor lógico das seguintes proposições, provando-as ou indicando um contra-exemplo:
   (a) Existe pelo menos um grupo de ordem n para todo o $n \in \mathbb{N}$.
   (b) $D_n \cong S_n$, para todo o $n \geq 3$.
   (c) S_4 tem quatro subgrupos de ordem 3.
   (d) Um grupo com n elementos é abeliano se e só se tem n classes de conjugação.

3. Considere o grupo $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ onde $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ e $ij = k$.
   (a) Mostre que $ji = -k$.
   (b) Encontre todos os subgrupos de Q.
   (c) Um grupo diz-se *hamiltoniano* se for não abeliano e todos os seus subgrupos são normais. Mostre que Q é hamiltoniano.
   (d) Mostre que não existe nenhum grupo hamiltoniano com menos de 8 elementos.

4. Seja G um grupo de ordem 26.
   (a) Mostre que se G é abeliano, então é cíclico.
   (b) Mostre que se G não é abeliano, então é diedral.

5. Considere a aplicação $\det : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ que a cada matriz faz corresponder o seu determinante.
   (a) Mostre que det é um homomorfismo de grupos.
   (b) Determine a imagem e o núcleo de det.
   (c) Encontre um isomorfismo entre $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ e um grupo quociente de $GL_n(\mathbb{R})$.

6. Determine todos os grupos abelianos de ordem 180 sem elementos de ordem 20.

FIM

Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra
Exame de ÁLGEBRA I 14/06/2006
Esboço de Resolução

1. Considere o grupo $G = (\mathbb{Z}_{11} \backslash \{0\}, \otimes_{11})$.

   (a) Mostre que G é cíclico.

   (b) Indique um subgrupo de G de ordem 5.

   (c) Será única a resposta à alínea anterior?

1.

(a) O elemento 2 tem ordem 10. Portanto $G =< 2 >$.

(b) $H =< 4 >$ porque 4 tem ordem 5.

(b)H é o único subgrupo de ordem 5, porque todo o grupo cíclico finito tem um e um só subgrupo de ordem d para cada divisor da ordem do grupo.(Justificação)

Uma outra justificação: Como $|G| = 2 \times 5$, existe um subgrupo H de ordem 5 e qualquer outro subgrupo da mesma ordem, sendo seu conjugado, coincide com ele porque G é abeliano.

2. Indique o valor lógico das seguintes proposições, provando-as ou indicando um contra-exemplo:

   (a) Existe pelo menos um grupo de ordem n para todo o $n \in \mathbb{N}$.

   (b) $D_n \cong S_n$, para todo o $n \geq 3$.

   (c) S_4 tem quatro subgrupos de ordem 3.

   (d) Um grupo com n elementos é abeliano se e só se tem n classes de conjugação.

2.

(a) Verdadeiro: O grupo cíclico de ordem n.

(b)Falso pois, para $n > 3$, $|S_n| > |D_n|$.

(c) Verdadeiro: em S_4 existem exactamente quatro $H_1 =< (1\ 2\ 3) >$, $H_12 =< (1\ 2\ 4) >$, $H_3 =< (1\ 3\ 4) >$ e $H_4 =< (2\ 3\ 4) >$. Eles contêm um par de elementos de ordem três, um elemento e o seu inverso, e o elemento neutro.

(d) Verdadeiro. Como $aba^{-1} = b$ se e só se $ab = ba$, o grupo G de ordem n tem n classes de conjugação se e só se todas as classes de conjugação são conjuntos singulares o que é equivalente a dizer que G é abeliano.

3. Considere o grupo $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ onde $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ e $ij = k$.

   (a) Mostre que $ji = -k$.

   (b) Encontre todos os subgrupos de Q.

   (c) Um grupo diz-se *hamiltoniano* se for não abeliano e todos os seus subgrupos são normais. Mostre que Q é hamiltoniano.

   (d) Mostre que não existe nenhum grupo hamiltoniano com menos de 8 elementos.

4. Seja G um grupo de ordem 26.

   (a) Mostre que se G é abeliano então é cíclico.

(b) Mostre que se G não é abeliano, então é diedral.

5. Considere a aplicação $\det : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ que a cada matriz faz corresponder o seu determinante.

   (a) Mostre que $\det$ é um homomorfismo de grupos.

   (b) Determine a imagem e o núcleo de $\det$.

   (c) Encontre um isomorfismo entre $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ e um grupo quociente de $GL_n(\mathbb{R})$.

6. Determine todos os grupos abelianos de ordem 180 sem elementos de ordem 20.

6. Existem quatro grupos não isomorfos de ordem $180 = 2^3 \times 3^2 \times 5$: $\mathbb{Z}_{180}$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{60}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{90}$ e $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{30}$. Nos dois primeiros 9 e (0, 3), respectivamente, têm ordem 20. Os dois últimos grupos não têm elementos de ordem 20: um elemento $(a, b) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ tem ordem igual ao menor múltiplo comum das ordens de a e de b.

3. (a) $jiij = j(-1)j = -jj = -(-1) = 1$, logo $ji = (ij)^{-1} = k^{-1} = -k$.

   (b) O único elemento com ordem 2 é -1, logo o único subgrupo de Q com ordem 2 é $\{\pm 1\}$ e Q não possui subgrupos isomorfos a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Logo os subgrupos de Q com ordem 4 são cíclicos: $< i >= \{\pm 1, \pm i\}$, $< j >= \{\pm 1, \pm j\}$ e $< i >= \{\pm k, \pm k\}$. Logo Q tem 6 subgrupos: $\{1\}, < -1 >, < i >, < j >, < k >$ e Q.

   (c) Pela alínea a), Q não é abeliano. Os subgrupos triviais $\{1\}$ e Q de Q são normais em Q. O subgrupo $< -1 >$ é normal em Q porque $x(\pm 1)x^{-1} = \pm xx^{-1} = \pm 1$, $\forall x \in Q$. Os subgrupos de ordem 4 são normais em Q porque têm índice 2.

   (d) O único grupo não abeliano com menos de 8 elementos é D_3. Como D_3 tem 3 subgrupos-2 de Sylow (os subgrupos gerados por cada uma das simetrias), estes subgrupos não são normais em D_3.

4. (a) Como $|G| = 2 \times 13$, se G é abeliano, é isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{13} \cong \mathbb{Z}_{26}$.

   (b) Pelos teoremas de Sylow, existem elementos $g, h \in G$ tais que $o(g) = 2$ e $o(h) = 13$. Tem-se $G = \{g^i h^j : i = 0, 1; j = 0, \ldots, 12\}$. Ora $hg = gh^j$, para algum $j \in \{1, \ldots, 12\}$ e este elemento tem ordem 2 (não pode ter ordem 26, pois então G seria cíclico, logo abeliano e por um dos teoremas de Sylow, não pode ter ordem 13). Assim $e = hghg = hggh^j = h^{j+1}$, donde $j = 12$. Portanto $hg = gh^{12} = gh^{-1}$, pelo que G é diedral.

5. (a) Como $\det(AB) = \det A \det B$, para $a, b \in GL_n(\mathbb{R})$, tem-se que $\det$ é um homomorfismo de grupos.

   (b) $\operatorname{Im} \det = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $\operatorname{Nuc} \det = SL_n(\mathbb{R})$.

   (c) Pelo teorema do isomorfismo, $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}\backslash\{0\}$.