Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

# ÁLGEBRA I

Exame

11/07/2006 Duração: 2h 30m

1. Seja $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}$.

   (a) Mostre que $G$ é um grupo multiplicativo.

   (b) Mostre que $N = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ é um subgrupo normal de $G$.

   (c) Determine $G/N$.

2. Indique o valor lógico das seguintes proposições, provando-as ou indicando um contra-exemplo:

   (a) Dois grupos da mesma ordem são isomorfos.

   (b) Um homomorfismo $f : G \to H$ é injectivo se e só se $\mathrm{Nuc}\, f = \{e\}$.

   (c) O número de classes laterais esquerdas de um subgrupo $H$ de um grupo finito $G$ é igual ao número de classes laterais direitas.

   (d) $S_3 \cong H \times K$, sendo $H =< (12) >$ e $K =< (123) >$.

3. O subgrupo comutador $[G, G]$ de um grupo $G$ é o subgrupo gerado pelos elementos da forma $ghg^{-1}h^{-1}$, para $g, h \in G$.

   (a) Determine $[D_5, D_5]$.

   (b) Mostre que $[D_5, D_5] \lhd D_5$.

   (c) Um grupo diz-se *metacíclico* se o seu subgrupo comutador e o respectivo quociente são cíclicos. Mostre que $D_5$ é metacíclico.

4. Seja $G$ um grupo de ordem 45.

   (a) Mostre que $G$ tem um subgrupo normal de ordem 5 e um subgrupo normal de ordem 9.

   (b) Conclua que $G$ é abeliano.

   (c) Determine todos os grupos não isomorfos de ordem 45.

5. Considere a aplicação $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ definida por $f(z) = z^n$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Mostre que $f$ é um homomorfismo de grupos.

   (b) Determine a imagem e o núcleo de $f$.

   (c) Deduza que $\mathbb{S}^1$ é isomorfo a um seu subgrupo quociente.

6. Seja $G \cong \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{50} \times \mathbb{Z}^2$. Determine um subgrupo cíclico de $G$ com ordem 60.

FIM