DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - UNIVERSIDADE DE COIMBRA

ÁLGEBRA I

Exame Complementar

30/07/2006 **Duração: 2h 30m**

1. Seja G um grupo finito. Prove que as seguintes condições são equivalentes:

   (a) $|G|$ é ímpar;

   (b) Todo o elemento de G tem ordem ímpar;

   (c) A equação $x^2 = a$ tem solução para todo o $a \in G$;

   (d) A equação $x^2 = a$ tem solução Única para todo o $a \in G$;

   (e) A equação $x^2 = e$ tem solução única $x = e$;

2. Sejam H e K subgrupos de um grupo finito G.

   (a) Mostre que, $[G : H \cap K] \leq [G : H][G : K]$ (Sugestão: Para $x, y \in G$, $Hx \cap Ky$ é uma classe lateral direita de $H \cap K$ em G se $Hx \cap Ky \neq 0$).

   (b) Se $m = [G : H]$ e $n = [G : K]$ são números primos entre si que pode dizer sobre $[G : H \cap K]$? Prove que, nesse caso, $G = HK$.

3. Seja $\varphi : G \to G'$ é um homomorfismo sobrejectivo com núcleo N.

   (a) Mostre que a função que a cada subgrupo H de G' faz corresponder $\varphi^{-1}(H)$ define uma correspondência bijectiva entre o conjunto dos subgrupos (normais) de G' e o conjunto dos subgrupos (normais) de G que contêm o núcleo de φ.

   (b) Se $G/N \cong \mathbb{Z}_p$, com p primo, o que pode concluir sobre N?

4. Mostre que todo o grupo de ordem n é isomorfo a um subgrupo de A_{n+2}.(Sugestão: Considere $f : S_n \to S_{n+2}$ definida por $f(a) = a$ se a par e por $f(a) = \alpha(n+1 \;\; n+2)$ caso contrário)

5. Para a acção por conjugação de um grupo finito G sobre si próprio, prove que

$$|G| = |Z(G)| + \sum \frac{|G|}{|G(x)|}, \in \backslash G_x \qquad |G| = |G(x)|\,|G_x|$$

   isto é

$$|G| = |Z(G)| + \sum [G : G_x],$$

   para representantes x de cada órbita com mais do que um elemento.

   Use este resultado para verificar que, se $|G| = p^n$ para algum primo p, então $Z(G) \neq \{e\}$.

6. Prove que todo o grupo de ordem 30 tem um subgrupo normal de ordem 3 ou um subgrupo normal de ordem 5.