Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

ÁLGEBRA I

Exame Complementar

12/07/2007 **Duração: 2h 30m**

1. Para um grupo cíclico C_n de ordem n, quantos homomorfismos $C_n \to C_n$ existem? E automorfismos?

2. Se H e K são subgrupos de um grupo finito G, mostre que

   (a) $[G:K] = [G:H][H:K]$, quando $K \subseteq H$;

   (b) $[G:H\cap K] \leq [G:H][G:K]$;

   (c) $[G:H\cap K] = [G:H][G:K]$ se $[G:H]$ e $[G:K]$ são números primos entre si.

3. Mostre que todo o grupo de ordem n é isomorfo a um subgrupo de A_{n+2}.(Sugestão: Considere $f : S_n \to S_{n+2}$ definida por $f(a) = a$ se a par e por $f(a) = a(n+1\ n+2)$ no caso contrário). $\in A_{n+2}$

4. Seja X um conjunto finito sobre o qual actua um grupo G de ordem p^n, com p primo. Se X_0 é o conjunto dos elementos cuja órbita é um conjunto singular, prove que $|X|$ r $|X_0|$ (mod p).

5. Um grupo abeliano (G,+) diz-se *divisível* se para todo o a $\in G$ e n E $\mathbb{N}$ existe um $b \in G$ tal que $nb = a$.

   (a) Dê exemplos de grupos divisíveis e de grupos não divisíveis.

   (b) Mostre que um grupo divisível não é finitamente gerado.

6. Reduzir o estudo de um grupo ao produto de grupos mais simples ou melhor conhecidos é uma tarefa importante. Descreva e dê exemplos deste processo para grupos finitos, distinguindo o caso abeliano do não abeliano e cobrindo as seguintes situações:

   - grupos indecomponíveis;

   - grupos que têm pelo menos um subgrupo normal;

   - grupos cujos subgrupos de Sylow são todos normais.