Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Grupos e Simetrias

1 Frequência

23/10/2007 Duração: 1h 30m

1. Considere no conjunto $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \backslash \{0\}$ a operação definida por

$$(a, b) * (c, d) = (a + bc, bd)$$

   (a) Mostre que $(G, *)$ é um grupo.

   (b) Prove que $f(a) = (0, a)$ define um homomorfismo $f : (\mathbb{R}^+, \times) \rightarrow (G, *)$.

   (c) Determine o núcleo e a imagem de f.

2. Considere o grupo $\mathbb{Z}_{12}$ para a adição módulo 12.

   (a) Mostre que é cíclico.

   (b) Determine dois subgrupos próprios.

3. Indique o valor lógico das seguintes proposições, provando-as ou indicando um contra-exemplo:

   (a) $\mathbb{Z}_8$ é isomorfo a D_4.

   (b) As permutações $(1245)(327)$ e $(2437)(123)$ têm a mesma ordem.

   (c) Existe um grupo de ordem n, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

   (d) Se $g^2 = e$ para todo o elemento g de um grupo G então G é abeliano.

4. Seja G um grupo e $g \in G$. Mostre que

   (a) $\psi_g : G \rightarrow G$ definida por $\psi_g(x) = gx$ é uma função bijectiva.

   (b) $\varphi_g : G \rightarrow G$ definida por $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$ é um isomorfismo. Descreva esse isomorfismo quando $G = S_3$ e $g = (123)$.

FIM