Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Grupos e Simetrias

Exame

12/01/2010 Duração: 2h 30m

1. Considere no conjunto $\mathbb{Z}$ a operação definida por

$$a \circ b = a + b + 1.$$

   (a) Mostre que $(\mathbb{Z}, \circ)$ é um grupo.

   (b) Prove que a função $f : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, \circ)$, definida por $f(a) = a - 1$, estabelece um isomorfismo entre os dois grupos.

   (c) Conclua que $(\mathbb{Z}, \circ)$ é cíclico e determine todos os seus geradores.

2. Indique o valor lógico das seguintes proposições, provando-as ou indicando um contra-exemplo:

   (a) Os ciclos de comprimento três geram S_n.

   (b) Todo o grupo de ordem 49 é abeliano.

   (c) O núcleo de qualquer homomorfismo de domínio G é subgrupo normal de G.

   (d) Todo o elemento do grupo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tem ordem finita.

3. Para o grupo diedral D_5 determine

   (a) as classes de conjugação;

   (b) um subgrupo de ordem n para cada divisor próprio n de 10;

   (c) todos os subgrupos normais e correspondentes grupos quocientes.

4. Seja G o subgrupo de S_9 gerado por $(1234)(45)$ e (68). Este grupo actua de forma natural em $X = \{1, 2, \cdots, 9\}$. Determine a órbita e o estabilizador de 4 e de 6.

5. Classifique os grupos de ordem 45.

6. Seja $G = \mathbb{Z}_{21} \times \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{10}$. Determine:

   (a) os coeficientes de torção de G;

   (b) um elemento de ordem 6;

   (c) um subgrupo de ordem 35.