Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Grupos e Simetrias

Exame

28/01/2010 Duração: 2h 30m

1. No conjunto $G = \mathbb{R} - \{0\} \times \mathbb{R}$ considere a operação definida por $(a, b) * (c, d) = (ac, b + d)$. Mostre que G
   (a) é grupo para a operação $*$,
   (b) tem um único subgrupo de ordem dois,
   (c) não tem subgrupos de ordem 3.
2. Indique o valor lógico das seguintes proposições, provando-as ou indicando um contra-exemplo:
   (a) Um homomorfismo $f : G \to G'$ é injectivo se e só se $\operatorname{Nuc} f = \{e\}$.
   (b) O número de classes laterais esquerdas de um subgrupo H de um grupo finito G é igual ao número de classes laterais direitas de H em G.
   (c) Todo o grupo não trivial é isomorfo ao produto directo de subgrupos próprios.
   (d) A menos de isomorfismo existem dois grupos de ordem 22.
3. Determine, para o grupo $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ dos quaterniões,
   (a) um conjunto de geradores,
   (b) as classes de conjugação e o centro,
   (c) as imagens homomorfas.
4. No grupo S_6 determine
   (a) ordem e a paridade dos elementos do subgrupo gerado por $\alpha = (12)(46)(15)$,
   (b) um elemento γ tal que $\gamma\alpha\gamma^{-1} = \beta$ para $\beta = (234)(16)$.
5. Classifique os grupos de ordem 52 que têm um subgrupo normal de ordem 4. Existem outros grupos de ordem 52?
6. Determine todos os grupos abelianos de ordem 700 sem elementos de ordem 25. Indique os correspondentes factores invariantes e coeficientes de torção.