Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

**Grupos e Simetrias**

1 Frequência

06/11/2008 Duração: 1h 30m

1. Seja $G$ o conjunto das matrizes $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, com $a$ e $b$ números reais não simultaneamente nulos. Prove que
   (a) $G$ é subgrupo de $GL_2(\mathbb{R})$;
   (b) $G \cap O_2(\mathbb{R}) \subseteq SO_2(\mathbb{R})$.
2. Considere as permutações $\alpha = (2345)$ e $\beta = (24)$. Determine
   (a) o grupo $H = < \{\alpha, \beta\} >$;
   (b) a ordem e a paridade dos elementos de $H$.
   (c) um isomorfismo de $H$ em $D_4$.
3. Mostre que os números 1,2, 4, 5, 7, 8 formam um grupo para a multiplicação módulo 9 e determine todos os seus subgrupos próprios.
4. Indique o valor lógico das seguintes proposições, justificando a sua resposta:
   (a) Grupos de ordem $p$ são isomorfos, se $p$ é primo.
   (b) Se o subgrupo $H$ de $S_n$ tem uma permutação ímpar então metade dos elementos de $H$ são ímpares.
   (c) Existe um homomorfismo de $f : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_5$ tal que $f(1) \neq 0$.
   (d) Se $G$ e $H$ são grupos cíclicos então $G \times H$ é cíclico.