DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Grupos e Simetrias

Exame

11/01/2011 Duração: 2h 30m

1. Seja G o conjunto das matrizes $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, com $n \in \mathbb{Z}$.
   (a) Mostre que G é um grupo para a multiplicação de matrizes.
   (b) Prove que o subconjunto H, constituído pelas matrizes de G com n par, é subgrupo normal de G.
   (c) Determine G/H.

2. Indique o valor lógico das seguintes proposições, provando-as ou indicando um contra-exemplo:
   (a) $G \times H$ é grupo cíclico se G e H são cíclicos.
   (b) As permutações (123)(4513)(69) e (123)(4567)(13) são conjugadas.
   (c) O núcleo de qualquer homomorfismo de domínio G é subgrupo normal de G.
   (d) Os grupos quocientes de $\mathbb{Z}_{21}$ têm ordem 1 ou 21.

3. Descreva os grupos de ordem 22 e determine, para cada um desses grupos,
   (a) as classes de conjugação;
   (b) os subgrupos normais próprios.

4. Seja G o subgrupo de S_9 gerado por (123)(45) e $X = \{1, 2, 3, \cdots, 9\}$. Definindo $\alpha(a, b) = (\alpha(a), \alpha(b))$, para $\alpha \in G$ e $(a, b) \in X \times X$,
   (a) mostre que se obtém uma acção de G em $X \times X$;
   (b) determine a órbita e o estabilizador de (2, 3).

5. Classifique os grupos de ordem 175.

6. Seja $G = \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}^3$. Determine:
   (a) os coeficientes de torção de G;
   (b) um elemento de ordem 6;
   (c) um subgrupo de ordem 30.