Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Grupos e Simetrias

Segunda Frequência

17/12/2010 Duração: 1h 30m

1. Determine o grupo quociente do grupo G pelo subgrupo H para
   (a) $G = D_4$ e $H =< r^2, s >$;
   (b) $G = \mathbb{Z}_{24}$ e $H =< 20 >$;
   (c) $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ e $H =< (1, 2) >$.
2. Seja $\mathcal{C}$ o grupo multiplicativo dos complexos de módulo unitário e n um inteiro positivo.
   (a) Mostre que a função $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ definida por $f(z) = z^n$ é um homomorfismo.
   (b) Determine o núcleo e a imagem de f.
   (c) Mostre que $\mathcal{C}$ é isomorfo a um dos seus grupos quocientes.
3. Classifique os grupos de ordem 45.
4. Determine os divisores elementares, os coeficientes de torção e um elemento de ordem máxima de $\mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_{21} \times \mathbb{Z}_6$.
5. Indique o valor lógico das seguintes proposições, justificando a sua resposta:
   (a) Se H é subgrupo normal do grupo G e $[G : H] = m$ então $g^m \in H$ para todo o $g \in G$.
   (b) A menos de isomorfismo, existe um único grupo de ordem 10.
   (c) O centro de D_5 é $\{e\}$
   (d) Qualquer grupo G tem uma acção por conjugação sobre o conjunto X dos seus elementos.