Exame de Lógica

Coimbra, 14-01-2002

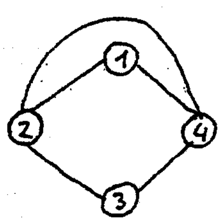
São devidamente valorizadas explicações claras, razoavelmente completas e justificadas, mas concisas. Ajudará incluir na elaboração dos problemas definições de conceitos que porventura apareçam. Peço escrita legível. Caso economize o tempo ou contribua à clareza permito a entrega de folhas de rascunho devidamente assinaladas. FAZER 4 dos 5 Problemas seguintes; caso fique tempo e ache ter respondido satisfatoriamente a estes, tente o problema que resta.

- =====

1. a. Enuncie, após devida definição dos conceitos pertinentes, o teorema da dedução.

b. Demonstre, recorrendo a esse teorema que para quaisquer fórmulas A, B, a fórmula $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$ é um teorema.

2. Temos uma máquina booleana, capaz de determinar os valores de verdade de fórmulas da lógica proposicional, desde que estas usem apenas os conectivos $\neg, \vee$, e $\wedge$. A máquina aceita à entrada para um natural arbitrário tabelas de formato $2^n \times n$ de todas as combinações de de 0s e 1s possíveis nas filas da tabela, e diz para cada fila da matriz se o conjunto das fórmulas com que é programada e que usa n variáveis proposicionais, é satisfeito. → exemp: no fim: prov.



Considere o grafo dado na figura 2. O conjunto das cores seja preto e branco. Uma coloração do grafo será chamada 'admissível' se nenhum vértice tiver três vizinhos (i.e. vértices ligado a ele por uma arresta) da mesma cor. Escreva um 'programa' que nos permita através dos resultados da máquina encontrar exactamente as colorações admissíveis.

(O 'programa' será um pseudo-código; a máquina permite ainda construções do tipo 'while .... end' etc.)

3. a. Apresente uma ideia para construir uma máquina de Turing que transforme uma posição-fita do tipo $01^l0^m1^n$ numa posição fita do tipo 01^{l+n}, supondo que $l, m, n \geq 1$.

Exemplo: $0111000 11 \rightsquigarrow 011111$.

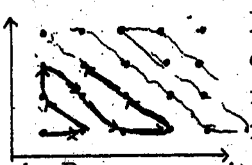
b. Tente realizar a máquina.

4. Seja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ uma função computável tal que $f(n) \geq n^2$.

a. Descreve como, possuindo a máquina para calcular f, é possível decidir se 13137 está no conjunto $f(\mathbb{N})$.

b. Sejam $e, f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funções computáveis. É conhecido que $f(n) \geq e(n)$ e que e é uma função injectiva cujo conjunto- imagem $e(\mathbb{N})$ é decidível. Mostre que o conjunto $f(\mathbb{N})$ decidível.

5. a. Um método para listar todos os pares de números naturais é indicado na figura. Os pares encontrados no caminho são, nesta ordem $(1,1), (2,1), (1,2), (1,3), (2,2), \ldots$.



Possuimos máquinas para calcular funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Usando a enumeração dos pares de naturais que descrevemos, descreva um método efectivo para formar a intersecção dos conjuntos $f(\mathbb{N})$ e $g(\mathbb{N})$.

b. Porque permite o método descrito na alínea (a) demonstrar que a intersecção de relações enumeráveis é enumerável?

c. Como provámos este facto nas aulas por métodos mais formais?

Problema 2 :

Tabela no caso $n=2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$