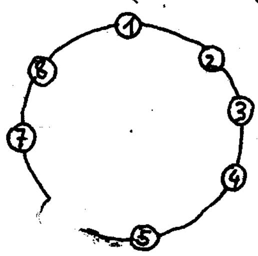
Exame de Lógica
Coimbra, 4-02-2002

Fazer exâmes com sucesso é <u>convencer</u> dos <u>conhecimentos</u> e da <u>compreensão</u> da matéria dada. Neste sentido são devidamente valorizadas explicações claras, razoavelmente completas e justificadas, mas concisas. Ajuda incluir na elaboração dos problemas definições de conceitos que porventura apareçam. Peço escrita legível. Caso economize o tempo ou contribua à clareza permito a entrega de folhas de rascunho devidamente <u>assinaladas</u>. FAZER 4 dos 5 Problemas seguintes; caso fique tempo e ache ter respondido satisfatoriamente a estes, tente o problema que resta.

1. a. Preparação: Escreva os axiomas do sistema proposicional L e mencione os dois exemplos de $\Gamma \vdash F$ dados nas aulas antes e depois do teorema da dedução.
b. Segundo qual dos teoremas do sistema L é claro que para fórmulas A, B quaisquer, a fórmula $(A \to B) \to B$ é um teorema?
c. Aplique axioma 2 (entendido com notação das aulas) com 'A' igual a $(A \to B)$ e '$(B \to C)$' igula a $(A \to B)$ para dar uma demonstração, em L, do facto que $\vdash (A \to B) \to B$.
d. Pelo teorema da dedução é imediato que $\vdash A \to ((A \to B) \to B)$. Porquê?
e. Aceitando que para quaisquer fórmulas F, G, a fórmula $(F \to G) \to (\neg G \to \neg F)$ é, um teorema em L, infira das alíneas anteriores que $\vdash A \to (\neg B \to \neg(B \to A))$ para quaisquer fórmulas A, B.



2. O 'colar' na figura é considerado colorido de forma 'admissível' com pérolas brancas, verdes, e azuis, se pérola 1 for verde e se entre quaisquer duas pérolas brancas estiverem pelo menos duas de outra cor. Escreve (ou, caso seja numeroso, indique claramente como encontrar) um conjunto de fórmulas que se torna consistente se e só se o colar tiver coloração admissível.

Como podia usar as fórmulas para encontrar, por computador, todas as colorações admissíveis?

3. a. Apresente uma ideia para construir uma máquina de Turing que transforme uma posição-fita do tipo 01^l (com $l \geq 1$) numa posição fita do tipo 01^l0111, (e que pára aqui).
b. Realize a máquina.

4. a. O que diz a tése de Turing-Church?; explique-a em particular no contexto da decidibilidade de relações.

b. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função computável tal que $f(n) \geq n^2$ para todos os $n \in \mathbb{N}$. Descreva como, possuindo a máquina para calcular f, é possível decidir se 2002 está no conjunto $f(\mathbb{N})$? E como podemos estabelecer a decidibilidade de $f(N)$ invocando teoremas provados nas aulas?

c. Sejam $e, f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funções computáveis. É conhecido que $f(n) \geq e(n)$ e que e é uma função injectiva cujo conjunto- imagem $e(\mathbb{N})$ é decidível. Mostre pela tése de Turing-Church que o conjunto $f(\mathbb{N})$ é decidível.

d. Ponha em termos mais precisos a afirmação seguinte: 'uma relação-k que junto com o seu complemento é enumerável, é computável'. Depois mostre a veracidade desta afirmação ou aplicando a tese de Turing-Church ou por uma demonstra são como feito nas aulas.

5. Tema: significado do Problema da Parágem e demonstração da sua insolubilidade.