

Exame de Lógica

18-Julho-2007

1. a. Dê as definições que entram no enunciado do teorema da compacidade. Enuncie este teorema, e explique qual e porque uma das suas implicações é trivial.
- b. Dê um exemplo do uso do teorema (com demonstração).
2. a. Demonstre que todo o teorema do sistema L é uma tautologia.
- b. Demonstre que no sistema L se tem
- i. $\emptyset \vdash A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$;
- ii. $\emptyset \vdash A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$.
- Sugestão: Note a relação entre as conclusões das implicações i e ii.
3. Demonstre, construindo e analisando uma máquina adequada, que a função $\mathbb{N}^2 \ni (n, m) \xrightarrow{f} (n + m + 2)$ é computável.
4. Seja $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função de valores reais.
- a. Seja $x_0 \in]0, 1[$. Expresse a frase 'f é diferenciável em x_0 ' por uma fórmula lógica, evitando a abreviatura 'lim'. $\exists \delta > 0 \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$
- b. Encontre uma negação útil desta fórmula e interprete-a.
5. a. Seja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ uma função (computável ou não) com a propriedade que $f(n) \geq \sqrt{n}$. Demonstre, invocando a tese de Turing Church que o conjunto $f(\mathbb{N})$ é decidível.
- b. Demonstre que o produto cartesiano de subconjuntos decidíveis de \mathbb{N} é decidível.
6. Demonstre a existência de funções não-computáveis.