

## Exame de Lógica

18-Julho-2007

1. a. Dê as definições que entram no enunciado do teorema da compacidade. Enuncie este teorema, e explique qual e porque uma das suas implicações é trivial.
- b. Dê um exemplo do uso do teorema (com demonstração).
2. a. Demonstre que todo o teorema do sistema L é uma tautologia.
- b. Demonstre que no sistema L se tem
- i.  $\emptyset \vdash A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$ ;
- ii.  $\emptyset \vdash A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$ .
- Sugestão: Note a relação entre as conclusões das implicações i e ii.
3. Demonstre, construindo e analisando uma máquina adequada, que a função  $\mathbb{N}^2 \ni (n, m) \xrightarrow{f} (n + m + 2)$  é computável.
4. Seja  $f : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de valores reais.
- a. Seja  $x_0 \in ]0, 1[$ . Expresse a frase 'f é diferenciável em  $x_0$ ' por uma fórmula lógica, evitando a abreviatura 'lim'.  $\exists \delta > 0 \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$
- b. Encontre uma negação útil desta fórmula e interprete-a.
5. a. Seja  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  uma função (computável ou não) com a propriedade que  $f(n) \geq \sqrt{n}$ . Demonstre, invocando a tese de Turing Church que o conjunto  $f(\mathbb{N})$  é decidível.
- b. Demonstre que o produto cartesiano de subconjuntos decidíveis de  $\mathbb{N}$  é decidível.
6. Demonstre a existência de funções não-computáveis.