Exame em LÓGICA, 13 de Janeiro de 2012

1 a. O que diz o teorema da legibilidade única de fórmulas em $\mathcal{P}(P_0)$?

b. O que significa a simbología $\Gamma \vdash A$?

c. É $((A \to B) \to A)$ com A, B fórmulas um teorema do sistema $\mathcal{L}$?

d. Lógica de predicados: alfabetom e definição de termos, fórmulas atómicas, fórmulas.

e. O que diz o teorema da indecidibilidade da parágem?

f. Seja P uma 2-relação listável. Então a 1-relação $\exists x P(x, n)$ é (necessariamente) listável?

2. Quatro amigos vão visitar um museu e exactamente um deles resolve entrar sem pagar. Aparece um fiscal que quer saber qual deles entrou sem pagar.

- Eu não o fui diz o Benjamin.	- Foi o Carlos diz o Mário
- Foi o Pedro diz o Carlos	- O Mário não tem razão diz o Pedro.

Só um deles mentiu. Quem mentiu e quem não pagou a entrada do museu?

3. a. Enuncie o teorema da compacidade da lógica proposicional e defina os conceitos que nele entram.

b. Um passo da demonstração deste teorema afirma que temos uma aplicação bijectiva

$$\{\text{valuações}\} \ni \nu \overset{\varphi}{\mapsto} S_\nu := \{A : \nu(A) = 1\} \in \{\text{conjuntos } *\text{-consistentes}\}$$

i. Porquê são os conjuntos S_ν de facto $*$-consistentes?

ii. Porquê é a aplicação injectiva?

iii. Porquê é que ela é também sobrejectiva?

4. Considere as funções Quot: $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ e Resto: $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definidas por Quot(m, n) :=quociênte da divisão de m por n; e Resto(m, n) :=resto da divisão de m por n. Por exemplo Quot$(100, 6) = 16$, Resto$(100, 6) = 4$, pois $100 = 16 \cdot 6 + 4$. Mostre que Quot e Resto são funções computáveis.

(Na verdade Quot e Resto podem assumir o valor 0, o que não admitímos na nossa abordagem da computabilidade pela razão que o 0 nos serve como separador entre blocos de 1s. Mas é pouco aconselhável resolver o problema com máquinas e todo o resto da teoria da computabilidade pode ser tratado sem a restrição aos inteiros estritamente positivos.)

5. a. Construa uma máquina que dê $0\overset{*}{1}$ (e pare) se arrancar com $0\overset{1}{1}{}^n$ com $n \leq 5$, e que pare (simplesmente) se arrancar sobre uma tal fita com $n \geq 6$.

b. Refina estas ideias para construir uma máquina que dê $0\overset{*}{1}1$ se arrancar com $0\overset{1}{1}{}^n$ com $n = 1, 2, 3, 4$ mas $0\overset{*}{1}$ se arrancar com uma fita $0\overset{1}{1}{}^5$, e que pare (simplesmente) se arrancar com uma fita $0\overset{1}{1}^{n}$ com $n \geq 6$.

6. a. Dê argumentos informais que mostram que uma k-relação R é decidível se e só se ela e sua negação forem listáveis.
b. Como se prova isto técnicamente?
c. Existem conjuntos listáveis cujo complemento não é listável?.

Se tiver ainda tempo (ou não saiba avançar nos outros problemas):

7. a. Descreva ideias (ev. baseadas no problema 5) para construir uma máquina que demonstre directamente a decidibilidade do conjunto $\{5\}$.
b. Construa esta máquina.