departamento de matemática da universidade de coimbra

MÉTODOS MATEMÁTICOS DA BIOLOGIA

Ano lectivo de 2007/2008 trabalho 2

Prazo de entrega: 12-11-2007

1. Considere o seguinte modelo presa-predador de Lotka-Volterra

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= u(1-\epsilon u - v) \\ \frac{dv}{dt} &= av(u-1). \end{aligned}$$

   (a) Mostre que o estado estacionário não trivial $(u^*, v^*) = (1, 1-\epsilon)$ é estável quando ϵ é suficientemente pequeno e positivo.

   (b) Mostre que a função definida por $\psi(u,v) = \phi(u,v) - \phi(u^*, v^*)$, onde

$$\phi(u,v) = a(u - \log u) + v - v^* \log v,$$

   é uma função de Lyapunov para o sistema dado.

   (c) Enuncie o Teorema de Poincaré-Bendixson.

   (d) Considere o sistema com condições iniciais no primeiro quadrante. Mostre que o estado estacionário de coexistência é assimptoticamente estável.

2. Considere o sistema $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$, em que x é uma função real de variável real, e f é uma função contínua que satisfaz as seguintes condições:

$$f(0) = 0, \quad xf(x) < 0 \;\; \forall x \neq 0, \quad -\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \infty, \quad \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \infty.$$

   Seja

$$V(x) = -\int_0^x f(\sigma)\,d\sigma.$$

   Mostre que V é uma função de Lyapunov na origem. Tire conclusões acerca da estabilidade do estado estacionário $x = 0$.