DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA
MÉTODOS MATEMÁTICOS DA BIOLOGIA
EXAME-PARTE II
17-01-2011

1)Considere uma população com uma densidade inicial $u_0(x,y)$ que se dispersa num domínio $K=[0,L]\times[0,L]$, com um coeficiente de difusão D constante e uma taxa de variação α (que inclui a taxa de natalidade e a taxa de mortalidade).

a) Apresente os modelos diferenciais que representam a evolução da população nos seguintes casos:

i) Inexistência de fluxo na fronteira de K.

ii) Entrada de população em $\{(0,y);y\in[0,L]\}\cup\{(x,L);x\in[0,L]\}$,com uma densidade constante u_0 e uma velocidade v_0;saída de população em $\{(x,0);x\in[0,L]\}\cup\{(L,y);y\in[0,L]\}$,com uma velocidade v_0.

iii) Fronteiras hostis.

b) Estude a solução analítica do modelo com fronteiras hostis (iii) e analise a existência de valores críticos para as dimensões do domínio.

2) Considere a dispersão em R^2 de uma população inicial de N_0 indivíduos de uma certa espécie, colocados na origem, com um coeficiente de difusão D constante e uma taxa de crescimento ε constante,

$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial t}=D\Delta N+\varepsilon N,(x,y)\in R^2,t>0,\\ N(x,y,0)=N_0\partial(x,y),(x,y)\in R^2, \end{cases}$$

em que $\partial(x,y)$ representa a função ∂ de Dirac.Represente por N^*a densidade populacional mínima que é detectável.

a) Apresente uma relação que lhe permita calcular o tempo necessário para detectar a população a uma distância r da origem.

b) Determine com que velocidade progride o raio de uma bola centrada na origem tal que no seu exterior a população total seja constante.