Métodos Matemáticos da Biologia
13 de Dezembro de 2010

1) Estude a existência de um tamanho crítico abaixo do qual se poderá extinguir uma população cuja evolução é descrita pelo problema de difusão-reacção

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} = D\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \lambda P, t > 0, x \in (0, L), \\ P_x(0,t) = 0, t > 0, \\ P_x(L,t) = -aP(L,t), t > 0, \\ P(x,0) = P_0(x), x \in (0,L). \end{cases}$$

em que λ e a são constantes positivas.

2) O comportamento da "taxa de disparo" da actividade neuronal, $n(x,t)$, é descrita por uma equação integro-diferencial do tipo

$$\frac{\partial n}{\partial t} = f(n) + \int_R w(x-y)(n(y,t)-1)dy$$

em que $f(n)$ representa uma contribuição autónoma (do próprio neurónio),w é uma função núcleo e o termo integral representa a contribuição dos neurónios vizinhos: se $n(x,t) > 1$ a contribuição dos neurónios vizinhos é positiva; se $n(x,t) < 1$ a contribuição dos neurónios vizinhos é negativa.

a)Admitindo regularidade suficiente nos dados do problema, transforme o modelo anterior numa equação de derivadas parciais, que envolva os momentos do núcleo w,até à quarta ordem.Suponha que $n(x,t)$ depende da contribuição de neurónios situados "suficientemente próximos" de x.

b)Seja $w(z) = e^{-bz^2}$.Calcule o primeiro momento

$$I(b) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bz^2} dz.$$

e em seguida calcule os sucessivos momentos até à quarta ordem.(Sugestão-Calcule $\frac{dI}{db}$)

c)Defina o núcleo

$$w(z) = b_1 e^{-(\frac{z}{d_1})2} - b_2 e^{-(\frac{z}{d_2})2}.$$

em que $b_1, b_2, d_{1,} d_2 \in R$.Escreva a EDP que corresponde a este núcleo.

d) Suponha que f(1)=0. Linearize a equação em torno da solução de equilíbrio e estabeleça uma relação entre σ e k de modo que uma função-onda do tipo

$$n(x,t) = e^{\sigma t + ikx}$$

seja solução da equação.Indique como poderia analisar o efeito estabilizador da difusão de pequeno e grande alcance em função dos parâmetros b_1, b_2, d_1, d_2.

3) Discuta a existência de ondas viajantes no modelo

$$\frac{\partial u}{\partial t} + ku\frac{\partial u}{\partial x} = u(1-u) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x \in R$$

em que $k \in R$.