Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Frequência de Métodos Matemáticos da Física

10 de Novembro de 2006 2h30

1. Classifique a equação de derivadas parciais $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sqrt{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ e determine a sua forma canónica.

2. Considere o problema diferencial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,y,z,t) = \Delta u(x,y,z,t), \ (x,y,z) \in I\!R^3, t > 0, \\ u(x,y,t,0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,0) = \phi(x+y+z), \quad (x,y,z) \in I\!R^3. \end{cases}$$

   (a) Mostre que o problema anterior é equivalente a

$$(P) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 3\dfrac{\partial^2 v}{\partial p^2}, \ p \in I\!R, t > 0 \\ v(p,0) = \dfrac{\partial v}{\partial t}(p,0) = \phi(p), \ p \in I\!R. \end{cases}$$

   (b) Mostre que se $\phi \in C^2$ e ϕ tem suporte compacto, então o problema (P) tem quando muito uma solução.

   (c) Determine w tal que

$$(Q) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 3\dfrac{\partial^2 w}{\partial p^2} + 3\phi''(p)(1+t), \ p \in I\!R, t > 0, \\ w(p,0) = \dfrac{\partial w}{\partial t}(p,0) = 0, \ p \in I\!R. \end{cases}$$

   (d) Determine a solução do problema (P) utilizando a solução de (Q) e indique a solução do problema inicial.

3. Considere o problema de difusão

$$(D) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ x \in I\!R, t > 0, \\ u(x,0) = g(x), \ x \in I\!R. \end{cases}$$

   (a) Seja g contínua e limitada em $I\!R$. Indique a expressão da solução do problema (D) e mostre que tal função é contínua em $I\!R \times (0, +\infty)$ e

$$\lim_{t \to 0^+} u(x,t) = g(x), \ x \in I\!R.$$

   (b) Considere $g(x) = x^2$. Determine a expressão de u. A condição inicial vale no sentido forte?

4. Considere o problema diferencial

$$(S)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(K(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right), \; x>0, t>0, \\ \\ u(0,t)=u_0, \; t>0, u(x,0)=u_L, \; x>0. \end{cases}$$

(a) Seja $\eta = \dfrac{x}{2\sqrt{t}}$ e $v(\eta)=u(x,t)$. Estabeleça, a partir (S), o problema para v

$$(V)\begin{cases} -2\eta v'(\eta) = (\tilde{K}(\eta)v'(\eta))', \; \eta\in(0,\infty), \\ \\ v(0)=u_0, \; \lim\limits_{\eta\to+\infty} v(\eta)=u_L, \end{cases}$$

em que $\tilde{K}(\eta)=K(x,t)$.

(b) Mostre que

$$v(\eta) = C_1\int_0^\eta \frac{1}{\tilde{K}(s)} exp(2\int_0^s \frac{\sigma}{\tilde{K}(\sigma)}\, d\sigma)\, ds + u_0, \; \eta>0,$$

em que $C_1\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\tilde{K}(s)} exp(2\int_0^s \frac{\sigma}{\tilde{K}(\sigma)}\, d\sigma)\, ds = u_L - u_0$.

(c) Indique a expressão da solução de (S).