Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Frequência de Métodos Matemáticos da Física

22 de Dezembro de 2007 2h30

1. Considere o problema de condição inicial

$$(P)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = -u^2, \; x \in IR, t > 0 \\ \\ u(x,0) = \phi(x), \; x \in IR. \end{cases}$$

   (a) Suponha que $\phi > 0, \phi' > 0$.

      i. Determine uma representação $x = g_1(\xi, t), u = g_2(\xi, t)$ da solução de (P).

      ii. Mostre que existe $z = u(x,t)$ para todo $x \in IR$ e $t > 0$.

      iii. Calcule $\dfrac{\partial u}{\partial t}$.

   (b) Considere (P) com condição inicial

$$\phi(x) = \begin{cases} x \,,\; x \in [0,1] \\ \\ x^2, \; x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty). \end{cases}$$

   A solução deste problema apresenta choques?

2. Considere o problema de condições inicial e de fronteira

$$(Q)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \; x \in (0,1), t > 0 \\ \\ u(0,t) = 0, u(1,t) = t, t > 0 \\ \\ u(x,0) = f(x), \; x \in (0,1). \end{cases}$$

   (a) Mostre que $u(x,t) = w(x,t) + xt$ em que

$$(H)\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - x, \; x \in (0,1), t > 0 \\ \\ w(0,t) = w(1,t) = 0, t > 0 \\ \\ w(x,0) = f(x), \; x \in (0,1). \end{cases}$$

   (b) Estabeleça para w a expressão

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_n(0) e^{-n^2\pi^2 t} + \frac{2(-1)^n}{n^3\pi^3}(1 - e^{-n^2\pi^2 t}) \Big) sen(n\pi x), t \geq 0, x \in [0,1],$$

   em que $A_n(0) = 2\displaystyle\int_0^1 f(x) sen(n\pi x)\, dx, n \in IN$.

   (c) Mostre que se $f(0) = f(1) = 0$ e f' é contínua em $[0,1]$, então u é contínua em $[0,1] \times [0,\infty)$.

   (d) $u \in C^\infty((0,1) \times (0,\infty))$?