Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Métodos Matemáticos da Física

15 de Janeiro de 2008 2h30

1. (a) Mostre que $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} g(s)\,ds, x \in IR, t \geq 0$, em que $g \in C^1(IR)$, é solução do problema de condições iniciais

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t),\ x \in IR, t > 0 \\ u(x,0) = 0, t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), x \in IR. \end{cases}$$

(b) Indique as condições que garantem a unicidade da solução da alínea anterior.

(c) Determine a solução do problema diferenical

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - t\psi''(x),\ x \in IR, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)(x), x \in IR. \end{cases}$$

2. Considere o problema diferencial

$$(P)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t),\ x > 0, t > 0 \\ u(0,t) = u_\ell, t > 0 \\ \lim\limits_{t\to 0} u(x,t) = u_0, x > 0. \end{cases}$$

(a) Mostre que $u(x,t) = A + Berf(\frac{x}{2\sqrt{t)}}$ verifica a equação de difusão de (P) (Note que $erf(y) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^y e^{-s^2}\,ds$.

(b) Determine A e B de modo a que a função da alínea aterior seja solução de (P).

(c) Calcule $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t),\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0$.

(d) Seja $M(t) = \displaystyle\int_0^t u(x,t)\,dx, t \geq 0$ e $u_0 = 0$. Mostre que $M'(t) = -\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t)$ e conclua que $M(t) = 2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}$.

3. Considere o problema de condição de fronteira

$$(Q)\begin{cases} \Delta u(x_1,x_2) = 0,\ x_1 \in IR, x_2 \in IR^+ \\ u(x_1,0) = g(x_1),\ x_1 \in IR. \end{cases}$$

(a) Defina função de Green para (Q).

(b) Mostre que

$$G(x_1,x_2,\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{4\pi}\ln\Big(\frac{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2}{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2+\xi_2)^2}\Big),\ (x_1,x_2) \in IR \times IR_0^+, (\xi_1,\xi_2) \in IR \times IR^+,$$

é função de Green de (Q).

(c) Suponha que $u \in C^2(I\!R \times I\!R_0^+)$. Verifique se a solução de (Q) admite a representação

$$u(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\pi} \int_{I\!R} g(x_1) \frac{\xi_2}{(x_1 - \xi_1)^2 + \xi_2^2} \, dx_1, (\xi_1, \xi_2) \in I\!R \times I\!R^+.$$

4.