**Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra**

**Frequência de Métodos Matemáticos da Física**

6 de Dezembro de 2007 2h30

1. (a) Estude a estabilidade da equação $\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \gamma^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\beta \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0.$

   (b) Seja $\psi \in C^2(IR)$. Prove que $v(x,t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t} \psi(s)\, ds$, $(x,t) \in IR \times [0,+\infty)$, é solução do problema de Cauchy

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\ \ x \in IR,\ t > 0,\ v(x,0) = 0,\ \ \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = \psi(x),\ \ x \in IR.$$

   (c) Em que condições pode garantir a unicidade da solução da alínea anterior.

   (d) Determine a solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t) = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) + t(sen(x)+1)\,,\ (x,t)\, IR \times (0,+\infty) \\ v(x,0) = x,\ \ x \in IR,\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0) = sen(x),\ x \in IR. \end{cases}$$

2. (a) Considere o problema de difusão

$$(P) \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \ \text{ em}\, IR \times (0,+\infty) \\ v(x,0) = \phi(x),\ \ x \in IR \end{cases}$$

   em que $\phi$ é contínua e limitada em $IR$. Indique a expressão da solução do problema anterior num sentido que deve especificar e prove que tal função é contínua e tem derivada parcial, em relação ao espaço, também contínua em $IR \times (0,+\infty)$.

   (b) Seja $\phi : IR \to IR$ definida por

$$\phi(x) = \begin{cases} -|x| + 1,\ \ x \in [-1,1] \\ \\ 0,\ \ x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \end{cases}.$$

      i. Determine a solução $v$ de (P).

      ii. A função determinada na alínea anterior é $C^\infty$?

      iii. Calcule $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} v(\frac{1}{2}, t)$.

3. (a) Seja $u \in C^2(\overline{B}_a(0))$ harmónica em $B_r(0) \subset IR^2$.

      i. Prove que $u(0) = \dfrac{1}{2\pi a}\displaystyle\int_{S_a(0)} u\, ds.$

      ii. Calcule $u(0)$ sabendo que $u(x) = x_1 + x_2, x \in S_a(0)$.

   (b) Considere os problemas diferenciais

$$\begin{cases} \Delta u = f \,\text{em}\, B_a(0) \\ \\ u(x) = sen(|x|) \,\text{em}\, S_a(0) \end{cases},\qquad \begin{cases} \Delta u_n = f \,\text{em}\, B_a(0) \\ \\ u_n(x) = sen(|x| + \frac{1}{n}) \,\text{em}\, S_a(0) \end{cases}, n \in IN.$$

   Suponha que $u, u_n \in C^2(B_a(0)) \cap C(S_a(0))$. Mostre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)\,,\ \forall x \in \overline{B}_a(0).$