DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

MÉTODOS MATEMÁTICOS DA FÍSICA

Exame-Época Normal

23-01-2009 DURAÇÃO: 2H

1. Seja $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua e com suporte compacto. Considere o problema de difusão

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad \text{em}\, \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty) \\ u(x, y, 0) = \Phi(x, y), \ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

em que $\Phi(x, y) = \phi_1(x)\phi_2(y)$ e $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Mostre que

$$u(x, y, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{\mathbb{R}^2} exp\left(-\frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{4t}\right) \Phi(x', y')dx'dy', (x, y) \in \mathbb{R}^2, t > 0,$$

é tal que

   (a) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times (0, +\infty))$,
   (b) u verifica a equação de difusão em $\mathbb{R}^2 \times (0, +\infty)$,
   (c) $\lim_{t \to 0^+} u(x, y, t) = \Phi(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
   (d) Determine u com $\Phi(x, y) = x^2 y^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2. Seja $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ e

$$(S) \begin{cases} \Delta u_n = 0 \ \text{em}\, B_1(0) \\ u_n = f_n \ \text{em}\, S_1(0). \end{cases}$$

   (a) Defina função de Green G para (S).
   (b) Mostre que se $u_n \in C^2(\overline{B}_1(0))$, então

$$u_n(\xi_1, \xi_2) = \frac{1 - (\xi_1^2 + \xi_2^2)}{2\pi} \int_{S_1(0)} \frac{f_n(x_1, x_2)}{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}\, dx, \ (\xi_1, \xi_2) \in B_1(0).$$

   (c) Seja f tal que $f_n \to f$ uniformemente e $u = \lim_n u_n$. Mostre que $u \in C^\infty$.
   (d) Suponha que $f(x_1, x_2) = x_2^2$. Calcule $u(0)$.

3. Considere o problema de condição inicial

$$(Q) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + b(u)\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \ \ \text{em}\, \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

   (a) Prove que se b' e u_0' têm o mesmo sinal, então (Q) tem solução.
   (b) Determine instante the choque quando $b(u) = u^2, u_0(x) = \begin{cases} x^2, \ x \leq 0 \\ x, \ x > 0. \end{cases}$

4. Considere o seguinte problema

$$(P) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t), \quad \text{em}\, (0, 1) \times (0, 1] \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, t \in [0, 1], \\ u(x, 0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, x \in [0, 1]. \end{cases}$$

   (a) Seja $v(x, t, \tau), x \in [0, 1], 0 \leq \tau \leq t \leq 1$, a solução de um problema auxiliar adequado e $u(x, t) = \displaystyle\int_0^t v(x, t, \tau)\, d\tau$. Mostre que u verifica (P).
   (b) Tome $g(x, t) = xt$.
      i. Determine a candidata a solução de (P).
      ii. Mostre que a candidata determinada na alínea anterior é uma função contínua em $[0, 1]^2$.