departamento de matemática da universidade de coimbra

MÉTODOS MATEMÁTICOS DA FÍSICA

frequência

22-12-2009 duração: 2.30h

I

Considere o problema de condição inicial

$$(P)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + g'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \text{ em } \mathbb{R}\times(0,+\infty) \\ u(x,0) = \phi(x),\ x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

1. Mostre que se g'' e ϕ' têm o mesmo sinal, então o problema (P) tem solução $z = u(x,t)$ definida em $\mathbb{R}\times[0,+\infty)$.
2. Determine $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.
3. Suponha que g tem suporte compacto em $\mathbb{R}$, $g' > 0$ e $u(\pm\infty, t) = \pm\infty$. Mostre que
$$M(t) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,dx, t\geq 0,$$
é constante.
4. Averigúe a existência de choques com $\phi(\xi) = \xi, \xi\in\mathbb{R}$, e $g(x) = \begin{cases} 1, & x\in[-1,1] \\ -|x|, & x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty). \end{cases}$

II

Considere o problema de condições inicial e de fronteira

$$(Q)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r(x,t), \text{ em } (0,1)\times(0,T], \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, t > 0, \\ u(x,0) = x(1-x),\ x\in(0,1). \end{cases}$$

1. Considere $r(x,t) = xt$. Estabeleça para a candidata a solução de (Q) a seguinte expressão
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(4\frac{(-1)^{n+1}+1}{(n\pi)^3}e^{-(n\pi)^2 t} + \frac{2(-1)^{n+1}}{(n\pi)^5}\left(t(n\pi)^2 - 1 + e^{-(n\pi)^2 t}\right)\right)\sin(n\pi x), (x,t)\in[0,1]\times[0,T].$$
2. Mostre que a série anterior tem soma $u : [0,1]\times[0,T]\to\mathbb{R}$ contínua e tal que existe $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ também contínua em $[0,1]\times(0,T]$.
3. Considere $r(x,t) = 0, T = +\infty$.
   (a) Seja $M(t) = \displaystyle\int_0^1 u(x,t)^2\,dx, t\in[0,T]$. Mostre que
      i. $M(t)$ é contínua, diferenciável e $M'(t)\leq 0, t > 0$;
      ii. $M(t) \leq \dfrac{32}{\pi^6}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^6}$, $t\in[0,+\infty)$.
   (b) Utilizando a alínea anterior, mostre que o problema diferencial tem solução única.