DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

MÉTODOS MATEMÁTICOS DA FÍSICA

EXAME

22-1-2010 DURAÇÃO: 2.30H

1. Considere o seguinte problema de condições iniciais

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \text{ em } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ v(x,0) = \phi(x),\ x \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

com $\phi \in C_0^2(\mathbb{R})$.

(a) Estabeleça a expressão de v.
(b) Prove que a solução encontrada é única.
(c) Demonstre o resultado que usou na alínea anterior.

2. (a) Estabeleça uma equação diferencial para a superfície $z = u(x,t)$ que contém a curva $u(x,1) = \phi(x)$ e tal que, em cada ponto (x,t,z), o vector $(f(x)h'(x), 1, z)$ pertence ao seu plano tangente.
(b) Estabeleça uma condição em h que garanta a existência da superfície $z = u(x,t)$.

3. Considere o problema de condição de fronteira

$$(P) \begin{cases} \Delta u = 0 \,\text{em}\, B_1(0,0), \\ u = g \,\text{em}\, S_1(0,0). \end{cases}$$

(a) Defina função de Green para o problema anterior.
(b) Suponha que $u \in C^2(\overline{B_1(0,0)})$. Estabeleça para u a seguinte reperesentação

$$u(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{S_1(0,0)} g(x_1,x_2)\frac{1-(\xi_1^2+\xi_2^2)}{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2}\,dx,\ (\xi_1,\xi_2) \in B_1(0,0).$$

(c) Sejam u e u_n as soluções do problema (P) para g e g_n, respectivamente. Mostre que se $\|g - g_n\|_\infty \to 0$, então $|u(0,0) - u_n(0,0)| \to 0$.
(d) Considere $g(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2, (x_1,x_2) \in S_1(0,0)$. Calcule $\displaystyle\max_{(x_1,x_2)\in\overline{B_1(0,0)}} u(x_1,x_2)$.

4. Considere o seguinte problema de condições de fronteira e inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda u, \text{ em } (0,1)\times(0,T], \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, t > 0, \\ u(x,0) = x(x-1),\ x \in (0,1). \end{cases}$$

(a) Utilizando o método de separação de variáveis estabeleça para u a seguinte expressão

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{-8}{((2n+1)\pi)^3} e^{-(\lambda+((2n+1)\pi)^2)t} sin(n\pi x).$$

(b) Prove que a expressão anterior define uma função contínua em $[0,1]\times[0,\infty)$.
(c) Considere $\lambda = 0$. Mostre que $\displaystyle\max_{(x,t)\in[0,1]\times[0,T]} u(x,t) = 0$.
(d) Prove o resultado utilizado na alínea anterior.
(e) Mostre que se $w(0) = w(1) = 0$, então $\displaystyle\int_0^1 w(x)^2 dx \le \int_0^1 w'(x)^2 dx$. $\Big($Sugestão: $w(x) = \displaystyle\int_0^x w'(y)\,dy, x \in [0,1]\Big)$.
(f) Seja $E(t) = \displaystyle\int_0^1 u(x,t), t \in [0,\infty)$. Mostre que, para $\lambda \ge -1$, $E(t) \to 0, t \to \infty$.