DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

MÉTODOS MATEMÁTICOS DA FÍSICA

EXAME DE RECURSO

1-02-2010 DURAÇÃO: 2.30H

1. (a) Mostre que $v(x,t) = \int_{\mathbb{R}} S(x-y,t)\phi(y)dy, (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, em que ϕ é contínua e limitada em $\mathbb{R}$, é solução da equação de difusão
$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \text{ em } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$$
(b) Determine a solução do problema diferencial
$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + x + t, \ \ (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ \\ v(x,0) = 0, \ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$
e especifique em que sentido é válida a condição inicial.

2. (a) Estabeleça uma condição em ψ que garanta a existência de $z = u(x,t)$ tal que
$$(P) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} = u \ \text{ em } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ \\ u(x,0) = \psi(x), \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$
(b) A solução de (P) apresenta choques quando $\psi(x) = e^{-2x}$?

3. Considere o problema de condição de fronteira
$$(Q) \begin{cases} \Delta u(x_1,x_2) = 0, \ x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}^+, \\ u(x_1,0) = g(x_1), \ x_1 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$
(a) Mostre que
$$G(x_1,x_2,\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{4\pi} \ln\Big(\frac{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2}{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2+\xi_2)^2}\Big),$$
para $(x_1,x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+, (\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, (x_1,x_2) \neq (\xi_1,\xi_2)$, é função de Green de (Q).
(b) Utilizando a função anterior e supondo que $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)$, estabeleça a representação
$$u(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi_2 g(x_1)}{(x_1-\xi_1)^2 + \xi_2^2}\, dx_1, \ (\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$$
(c) Suponha que g é contínua e tem suporte compacto. Mostre que a representação anterior define uma função contínua e limitada.

4. Considere o seguinte problema de condições de fronteira e inicial
$$(D) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ em } (0,1) \times (0,T], \\ \\ u(0,t) = u(1,t) = \dfrac{1}{4}, t > 0, \\ \\ u(x,0) = (x - \dfrac{1}{2})^2, \ x \in (0,1). \end{cases}$$
(a) Utilizando o método de separação de variáveis estabeleça para u a seguinte expressão
$$\frac{1}{4} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4}{(n\pi)^3}((-1)^{n+1} + 1)e^{-(n\pi)^2 t} sin(n\pi x).$$
(b) Justifique a afirmação: A solução de (D) pertence a $C^\infty((0,1) \times (0,+\infty))$.
(c) Determine os extremos de u em $[0,1] \times [0,T]$.