DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

MÉTODOS MATEMÁTICOS DA FÍSICA

FREQUÊNCIA

13-11-2009 DURAÇÃO: 2.30H

1. Considere o seguinte problema de condições iniciais

$$(O)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + xt, x \in \mathbb{R},\ t>0 \\ u(x,0)=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,\ x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

   (a) Determine a solução do problema (O).

   (b) Prove que a solução encontrada é única.

   (c) Enuncie o resultado em que baseou a sua resposta.

2. Considere o problema de condição inicial

$$(P)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) = \Delta u(x,y,t),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ t>0 \\ u(x,y,0) = \phi(x+y)\,, (x,y)\in\mathbb{R}^2. \end{cases}$$

   (a) Mostre que o problema anterior é equivalente a

$$(Q)\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(z,t) = 2\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}(z,t),\ z\in\mathbb{R},\ t>0 \\ v(z,0)=\phi(z)\,, z\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

   (b) Suponha que ϕ é contínua e limitada em $\mathbb{R}$. Indique a expressão da solução do problema (Q), num sentido que deve especificar, e prove que $\lim\limits_{t\to 0} v(z,t) = \phi(z)$, $z\in\mathbb{R}$.

   (c) Determine v com $\phi(z)=z^3$.

   (d) Indique a solução de (P) e especifique o sentido deste conceito.

3. (a) Sejam $v, w \in C^2(\overline{B_a(0,0)}), B_a(0,0)\subset\mathbb{R}^2$, soluções dos problemas de condição de fronteira

$$\begin{cases} \Delta v = f \ \text{ em } B_a(0,0), \\ v=0 \ \text{ em } \ S_a(0,0), \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} \Delta w = 0 \ \text{ em } \ B_a(0,0), \\ w = g \ \text{ em } \ S_a(0,0). \end{cases}$$

   Prove que $u = v + w$ é solução única do problema diferencial

$$\begin{cases} \Delta u = f \ \text{ em } \ B_a(0,0), \\ u = g \ \text{ em } \ S_a(0,0). \end{cases}$$

   (b) Seja, para $n\in\mathbb{N}$, $u_n \in C^2(\overline{B_a(0,0)})$ a solução do problema de condição de fronteira

$$\begin{cases} \Delta u_n = f \ \text{ em } \ B_a(0,0), \\ u_n = g_n \ \text{ em } \ S_a(0,0), \end{cases}$$

   em que $\|g_n - g\|_\infty \to 0, n\to\infty$. Mostre que

$$u_n(0,0)\to u(0,0),\ n\to\infty.$$

   (c) Determine, utilizando as alíneas anteriores e $f=0$, $u(0,0)$ quando $g_n(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 + \dfrac{x_1x_2}{n}$.