DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

MÉTODOS MATEMÁTICOS DA FÍSICA

FREQUÊNCIA

27-11-2010 DURAÇÃO: 2H30

I

1. Considere a equação diferencial $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - 4\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \alpha\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} = 0,\ \ \alpha \in \mathbb{R}$. Discuta a classificação da equação anterior em função do parâmtro α.

2. Considere $\alpha = -2$. Mostre que $v(x_1, x_2) = u(x,t)$ com $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{2}{3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, em que $[x\ t]^T = Q[x_1\ x_2]^T$ para uma certa matriz Q.

3. Considere o problema de condições iniciais

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = \frac{2}{3}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \text{ em } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, u_n(x,0) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,0) = \phi_n(x),\ x \in \mathbb{R},$$

com $\phi_n \in C_0^1(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Mostre que o problema anterior tem solução única a qual admite a representação

$$u_n(x,t) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\int_{x-\sqrt{\frac{2}{3}}t}^{x+\sqrt{\frac{2}{3}}t} \phi_n(y)\,dy, x \in \mathbb{R}, t \geq 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

(b) Considere agora o problema de condições iniciais

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{2}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ em } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, u(x,0) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \phi(x),\ x \in \mathbb{R},$$

com $\phi \in C_0^1(\mathbb{R})$. Seja $w_n(x,t) = u_n(x,t) - u(x,t)$.
Mostre que se $\lim\limits_{n\to\infty} \|\phi_n - \phi\|_\infty = 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} w_n(x,t) = 0, x \in \mathbb{R}, t \in [0,T]$.

II

1. Considere o problema de condições inicial e de fronteira

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v\frac{\partial u}{\partial x} \text{ em } (0,1)\times(0,T],\ u(x,0) = u_0(x) > 0,\ x \in (0,1),\ \ u(0,t) = u(1,t) = 0, t \in (0,T],$$

em que $v > 0$.

(a) Indique, justificando de modo conveniente, um modelo físico em que podemos considerar este modelo matemático.

(b) Prove que $\max\limits_{(x,t)\in[0,1]\times[0,T]} e^{-\frac{v}{2}x + \frac{v^2}{4}t} u(x,t) = \max\limits_{x\in[0,1]} e^{-\frac{v}{2}x} u_0(x)$.

(c) Demonstre o resultado em que baseou a resposta à alínea anterior.

2. Sejam $u_n, n \in \mathbb{N}$, e u tais que

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - v\frac{\partial u_n}{\partial x} \text{ em } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,\ u_n(x,0) = e^{\frac{v}{2}x}\psi_n(x),\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v\frac{\partial u}{\partial x} \text{ em } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,\ u(x,0) = e^{\frac{v}{2}x}\psi(x), x \in \mathbb{R},$$

em que $\psi_n, n \in \mathbb{N}$, e ψ são contínuas e limitadas em $\mathbb{R}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \|\psi_n - \psi\|_\infty = 0$.

Determine $\lim\limits_{n\to\infty} \big(u_n(x,t) - u(x,t)\big), (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.