DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

MÉTODOS MATEMÁTICOS DA FÍSICA

FREQUÊNCIA

20-12-2010 DURAÇÃO: 2H30

I

1. Seja $\overline{B_a(0))} \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3$. Considere o problema

$$(P_0) \qquad \Delta u = f \text{ em } B_a(0) \, , \qquad u = 0 \text{ em } S_a(0).$$

Mostre que (P_0) tem quando muito uma solução $u \in C^2(\overline{B_a(0)})$.

2. Sejam $\xi^* = \dfrac{a^2}{\|\xi\|^2}\xi$ e K a solução fundamental da equação de Laplace. Mostre que $G(x,\xi) = K(x,\xi) - \left(\dfrac{\|\xi\|}{a}\right)^{2-n} K(x,\xi^*)$, $x \in \overline{B_a(0)}$, $\xi \in B_a(0)$, $x \neq \xi$, é função de Green de (P_0).

3. Seja $a - \epsilon >> 0$ e $u_m \in C^2(\overline{B_{a-\frac{\epsilon}{m}}(0)})$ a solução de

$$\Delta u_m = f_m \text{ em } B_{a-\frac{\epsilon}{m}}(0) \, , \qquad u_m = 0 \text{ em } S_{a-\frac{\epsilon}{m}}(0), \, m \in \mathbb{N}.$$

Mostre que se $\lim\limits_{m\to\infty} \|f_m - f\|_{\infty,\overline{B_a(0)}} = 0$, então $\lim\limits_{m\to\infty} u_m(\xi) = u(\xi)$, $\xi \in B_{a-\epsilon}(0)$.

II

Considere o problema de condição inicial

$$(Q_1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + g(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ em } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \; u(x,0) = \phi(x), \, x \in \mathbb{R}.$$

1. Estabeleça uma condição suficiente para a existência de solução do problema (Q_1).
2. Indique uma expressão para g e para ϕ para os quais u apresenta choques.

III

1. Estabeleça para a solução do problema de difusão

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ em } (0,1) \times \mathbb{R}^+, \; u(0,t) = u(1,t) = 0, t \in \mathbb{R}^+, \; u(x,0) = \beta, \, x \in \mathbb{R},$$

a representação

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\beta \frac{(-1)^{n+1}+1}{n\pi} e^{-(n\pi)^2 t} \sin(n\pi x), x \in [0,1], t \in \mathbb{R}_0^+.$$

2. Considere o problema de difusão-reacção

$$(DR) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u + (\alpha - 1)e^t \text{ em } (0,1) \times \mathbb{R}^+, \; u(0,t) = u(1,t) = 0, t \in \mathbb{R}^+, \; u(x,0) = 0, \, x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Determine a solução de (DR) num sentido que deve especificar.

   (b) Calcule $M(t) = \displaystyle\int_0^1 u(x,t)^2 \, dx$, $t \in [0,T]$, e determine $\alpha \in [0,1]$ para o qual $M(T)$ tem o valor mínimo.