DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

MÉTODOS MATEMÁTICOS DA FÍSICA

EXAME

21-01-2011 DURAÇÃO: 2H30

1. (a) Considere o problema de condições iniciais

$$(P_o) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ em } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, u(x,0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \quad (x),\ x \in \mathbb{R},$$

em que $\in C_0^1(\mathbb{R})$. Mostre que $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t} \quad (s)\, ds, x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_0^+$, é solução única de (P_0).

(b) Determine a solução do problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cos(\pi x) \text{ em } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, u(x,0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

2. Considere o problema de difusão

$$(P_d) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) \text{ em } (0,1)\times(0,T],\ u(0,t) = u(1,t) = 0, t \in (0,T],\ u(x,0) = g(x),\ x \in (0,1).$$

(a) Suponha que $f(0) = 0$ e $f' < M$. Mostre que se (P_d) tem solução u, então u é única e verifica $\|u(t)\|_{L^2}^2 \leq e^{2Mt}\|g\|_{L^2}^2$, $t \in [0,T]$.

(b) Seja $f(u) = -bu$, $b > 0, g(x) = x(1-x)$.

i. Estabeleça para u a expressão

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{(-b-(n\pi)^2)t}\frac{4\big((-1)^{n+1}+1\big)}{(n\pi)^3} sin(n\pi x),\ \ x \in [0,1], t \in [0,T],$$

ii. Prove que u é uma função contínua em $[0,1]\times[0,T]$.

iii. Determine os extremos de u em $[0,1]\times[0,T]$.

3. Determine a solução do problema de condição inicial

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = e^{-u} \text{ em } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, u(x,0) = ln(1+x^2),\ x \in \mathbb{R}.$$

4. Considere o problema de Poisson : $\Delta u = f$ em $B_1(\mathbf{0}) \in \mathbb{R}^2$, $u = g$ em $S_1(\mathbf{0})$, em que $\mathbf{0} = (0,0)$.

(a) Suponha que $u \in C^2(\overline{B_1(\mathbf{0})})$. Prove que se tem

$$u(\xi) = \int_{B_1(\mathbf{0})} fG\, dx + \int_{S_1(\mathbf{0})} gH\, ds,\ \xi \in B_1(\mathbf{0}),$$

em que $G(x,\xi) = \dfrac{1}{2\pi}\ln\Big(\dfrac{\|x-\xi\|}{\|x-\xi^*\|}\Big), \xi^* = \dfrac{1}{\|\xi\|^2}\xi,\ H(x,\xi) = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1-\|\xi\|^2}{\|x-\xi\|^2},\ x \in \overline{B_1(\mathbf{0})}, \xi \in B_1(\mathbf{0}), x \neq \xi.$

[Sugestão: Tem-se $u(\xi) = \displaystyle\int_{B_1(\mathbf{0})} \Delta u G\, dx - \int_{S_1(\mathbf{0})} \Big(G\frac{\partial u}{\partial \eta} - u\frac{\partial G}{\partial \eta}\Big)\, ds,\ \xi \in B_1(\mathbf{0})$]

(b) Determine $u(\mathbf{0})$ para $f = 0$ e $g(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Cotação: 1a)3; 1b)2.5, 2a)2; 2bi)2; 2bii)2; 2biii)2; 3)2.5; 4a)2.5; 4b)1.5