

ATENÇÃO:

A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

É permitido o uso de calculadora e são proibidas todas as consultas.

✓ 1. Um *bit* é um 0 ou um 1. Um *byte* é uma sequência de 8 *bits*.

✓ (a) Quantos *bytes* há?

✓ (b) Quantos *bytes* há que começam e acabam em 11?

✓ 2. Temos 6 cores para pintar 31 objectos iguais.

✓ (a) De quantas maneiras podemos colorir os objectos?

✓ (b) E se todas as cores forem obrigatoriamente usadas, de quantas maneiras podemos colorir os objectos?

✓ (c) Ainda se todas as cores forem obrigatoriamente usadas, qual o número máximo de objectos que poderão ter a mesma cor?

✓ (d) E qual o número máximo de objectos que podemos garantir ficarem da mesma cor?

✓ 3. Qual é o coeficiente de x^{18} no desenvolvimento da expressão

$$(x + x^2 + x^3 + \dots + x^8)^4 (x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots)?$$

4. Num estudo de audiências da TV, feito por inquérito, os inquiridos revelaram que 20% vêem diariamente a TVI, 70% a RTP, 80% a SIC, 90% dois destes canais e 25% os três canais. Pergunta-se: é fiável este inquérito?

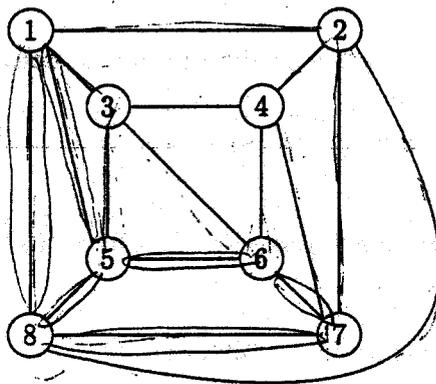
✓ 5. Seja D um digrafo com 6 vértices e cuja matriz de adjacência é dada por

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

✓ (a) Indique os graus dos vértices 1 e 5.

- (b) O digrafo D tem poços e fontes?
- (c) Indique, se existir, um caminho entre o vértice 5 e o vértice 6.
- (d) Que tipo de conexão possui este digrafo? Justifique.
- (e) Calcule a matriz de alcançabilidade e de fecho transitivo.

6. Considere o grafo da figura seguinte:



Responda justificando as respostas:

- (a) o grafo G é conexo?
 - (b) o grafo G é Euleriano?
 - (c) o grafo G é Hamiltoniano?
 - (d) o grafo G é regular?
 - (e) o grafo G é bipartido?
 - (f) o grafo G é planar?
 - (g) se fizer uma busca em amplitude a partir do vértice 1, quais são os níveis que obtém e quais os vértices de cada nível?
 - (h) qual é a distância máxima entre 2 vértices deste grafo? Dê uma demonstração rápida.
7. Mostre que se m e n são inteiros positivos, então $(mn)!$ é divisível por $(m!)^n$ e por $(n!)^m$.
8. Num grafo G designe por g o comprimento do menor ciclo de G . Sabe-se que se um grafo conexo $G = (V, E)$ com $g \geq 3$ é planar, então

$$|E| \leq \frac{g}{g-2}(|V| - 2).$$

Verifique que num grafo conexo e planar com 6 vértices de graus 3, 3, 3, 3, 5 e 5, respectivamente, o comprimento do menor ciclo terá de ser igual a três.