Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de **Matemática Finita** | 28 de Junho de 2001

Duração: 2h 30m

Leia com atenção as dez perguntas e justifique as respostas de forma sucinta e clara.

1. Qual o número de vectores da forma $v = (x_1, x_2, ..., x_n)$ cujas coordenadas satisfazem cada uma das condições (consideradas separadamente):

   (a) $x_i \in \{0, ..., k-1\}$, para $i \in \{1, ..., n\}$

   (b) $x_i \in \{0, ..., k_i - 1\}$, para $i \in \{1, ..., n\}$

   (c) $x_i \in \{0, 1\}$, para $i \in \{1, ..., n\}$, e $\sum_{i=1}^{n} x_i = r$

2. (a) Encontre a solução geral da seguinte relação de recorrência: $u_n = 6u_{n-1} - 9u_{n-2}$

   (b) Determine a solução particular para $u_0 = 0$, $u_1 = 1$

3. Quantos inteiros positivos de 6 dígitos existem se:

   (a) puder haver repetição de dígitos?

   (b) nenhum dígito se repete?

   (c) puder haver repetição de dígitos e o inteiro for par?

   (d) puder haver repetição de dígitos e o inteiro for divisível por 4?

4. (a) Quantas soluções inteiras, não negativas, existem para o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_7 = 37 \end{cases}$$

   (b) E para quantas dessas soluções $x_1, x_2, x_3 > 0$?

5. Considere a seguinte matriz de adjacência de um digrafo D:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   (a) O digrafo D é unilateralmente conexo? Porquê?

   (b) É possível, acrescentando apenas uma aresta, tornar o digrafo fortemente conexo? (Não se esqueça de justificar)

6. Diga, mais uma vez justificando, se são verdadeiras ou falsas as afirmações:

   (a) Um grafo bipartido tem sempre um número par de vértices.

   (b) Existe um grafo com treze vértices em que todos os vértices têm grau três ou cinco.

   (c) Um grafo com n vértices cujo número de arestas é superior a $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ é conexo.

   (d) Existe um grafo cúbico (não necessariamente conexo) com 40 vértices, cujo número cromático é igual a 4.

7. Como habitualmente, seja $T(n,k)$ o número de distribuições de n objectos distintos por k caixas distintas não podendo haver caixas vazias. Prove que:

$$T(n,k) = k[T(n-1,k-1) + T(n-1,k)]$$

8. Um grafo diz-se *2-conexo* se não for possível desconectá-lo sem remover, pelo menos, 2 vértices. Demonstre que um grafo 2-conexo contém, pelo menos, um ciclo.

9. Seja T uma árvore e p o grau máximo dos seus vértices. Prove que T tem, pelo menos, p vértices de grau 1.

10. Mostre que o número de substituições com n elementos e k ciclos, onde cada ciclo contém os elementos por ordem crescente, é o número de Stirling de 2^a espécie: $S(n,k)$.